Я люблю обе стороны математики: чистую - как возвышенный уход от реальности, прикладную - как страстное стремление к жизни.

Томас Саати.

Методы оптимизации.

13.09.2006. Лекция № 2.

$\underline{\lim} \; I(u_k) \geq I(u)$. $\qquad g(u) = \|u\|^2$

$\exists u_k$: $(>)$.

$U = \{u \in H : |u| \leq R\}$ — шар.

Д-м, что шар — слабокомп. мн-во в гильб. пр-ве.

<u>теор. Больц.-Вейерштр</u> (слабый вариант): если $\{u_k\}$: $\|u\| \leq const \; \forall n$ равном огр.,

$\Rightarrow \exists$ подпосл. $\{u_{k_r}\} \xrightarrow{сл} u \in H$

<u>д-во</u>: Колм.-Фомин. (в гильб. пр-ве H^* изометр H — теор. Рисса)

~~Из $\forall$ послед. $\{u_n\}$ мо~~

Рассм. $g(u_k) = \|u_k\|^2$

$\underline{\lim}_{r \to \infty} g(u_{k_r}) \geq g(u)$

$g(u_{k_r}) \leq R^2$, т.к. $\forall u_k \in U$

$\Rightarrow \underline{g(u) \leq R^2} \quad \Rightarrow \|u\| \leq R \qquad \Rightarrow$ шар — слабокомпакт. мн-во

(у $\forall$ посл. можно выдел. сх. подпосл, предел $\in$ мн-ву)

шар не явл. сильнокомпактным!

Рассм. сферу в гильб. пр-ве:

$S = \{ u \in H : \|u\| = R \}$ – огранич. замкнуто

компактности нет

нет ~~есть~~ слаб. компакти!

рассм $\{e_k\}$, $R = 1$

$\{e_k\} \xrightarrow{сл} 0$, но $0 \notin S$

Для слаб. комп. не хватает выпуклости!

Опр: мн-во U – выпуклое, если $\forall$ ~~отрез~~ $u, v \in U$, отрезок $[u, v] \in U$

$[u, v] = \{ w = \alpha u + (1-\alpha) v,\ \alpha \in [0,1] \}$

Теорема: Пусть U – выпуклое, замкнутое (по норм. $\|\cdot\|$), огранич. ($\|\cdot\|$) мн-во $\Rightarrow U$ – слабо компактно.

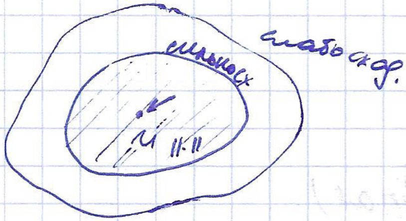
{ $\forall$ слабосход. посл. $\exists$ подп. среднеарифм. суммы сх-ся сильно }

Эта теор. удобна для проверки слаб. комп. мн-ва.

Слабосход. класс богаче, чем сильносход.,

т.к. сильн. сх-сть $\Rightarrow$ слаб. сх-сть

Но этот класс уже – редко есть слаб. сх-сть



слабоск $\not\Rightarrow$ сильноск

$g(u) = -\|u\|^2$ — есть сильн. ск-сть

непрер. по $\|\cdot\|$

не явл. слабополнонепрер. снизу! Есть сильн.

$\underline{\lim} \left(-\|u_k\|^2\right) \overset{?}{\geq} \|u\|^2$

$-\overline{\lim} \|u_k\|^2) \geq -\|u\|^2$

наиб. пред. т.
стала старшей

Эта ф-ия слабополнонепрер. сверху

$J(u)$ —

Ф-ия явл. ~~слабо~~полнонепрер. по норме!

Что надо, что б она стала слабополнонепр. снизу?

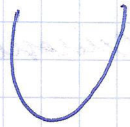
надо дополнить $\|$+ вып. $J(u)\|$

$J(u)$

Теор:

Вып. ф-ия $J(u)$ ~~слабо~~полнонепрерывна снизу по $\|\cdot\|$

$\Leftrightarrow J(u)$ — слабополнонепр. снизу

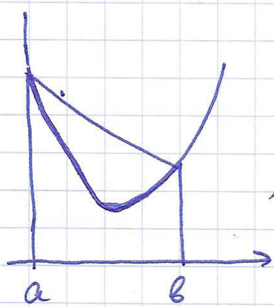


выпукл. вниз ф-ия

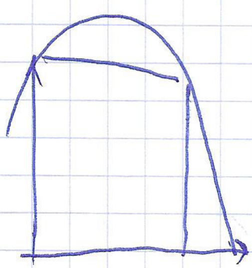
выпукл. вверх (наз. вогнутая)

Опр: $J(u)$ выпукл. в U (на выпукл. мн-ве), если $J(\alpha u+(1-\alpha)v) \le \alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)$

$\forall u,v \in U$
$\forall \alpha \in [0,1]$



хорде выше граф. ф-ии



хорда ниже ⇒ не подх.

⇒ от теор. Вейерштр. в метр. сильн. перех. к т. В. в слабой метр.

Выпуклый вариант теор. Вейерштр.

Теорема:

Пусть U - $\underbrace{\text{выпукл}, \overset{\|\cdot\|}{\text{замкнут.}}, \overset{\|\cdot\|}{\text{огранич.}}}_{\text{слаб. компакт}}$ мн-во из H.

$J(u)$ - $\underbrace{\overset{\|\cdot\|}{\text{полунепр. снизу}}, \text{выпукл.}}_{\text{слаб. полунепр. снизу}}$ на U

$\Longrightarrow$ 1) $J_* > -\infty$

2) $U_* \neq \varnothing$

3) $\forall$ min посл. $\{u_n\} \xrightarrow{\text{сл}} U_*$

А если пр-во банахово?!

Все остаётся верно $\forall$ рефлексивных банаховых пространств

B $\quad B^*$ - пр-во лин, непр. функц-лов $\quad B^{**}$

$B \subset B^{**}$

Если $B = B^{**} \Rightarrow$ рефлекс. пр-во

Всякое гильб. пр-во рефлексивное $\quad H^* = H$ по т. Рисса.

L_p, $1<p<\infty$ - рефлексивное

Если не рефлексивн $\Rightarrow$ плохо. Пр. L_1 $\quad$ шар. - не сл. комп. В шаре есть дырки - плохо

C - тоже не рефлексивно.

Пример, когда т. Вейерштр не имеет места

$$J(u) = \int_{-1}^{0} u(t)\,dt - \int_{0}^{1} u(t)\,dt \longrightarrow \min$$

минимизац ф-ии на шаре в пр-ве C

$u \in U$

$$U = \{ u = u(t) \in C[-1,1],\ \|u\|_C = \max_{t\in[-1,1]} |u(t)| \le 1 \}.$$

$J(u)$ – слабонепрер., т.к. она линейная.

скал. произв

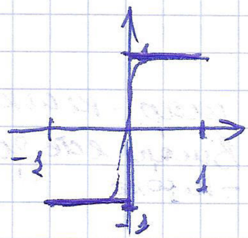
$(c, u)_H = g(u)$ – слабонепрер (по опр.)

линейн функционал c на эл-те u

Формально выполн. все для теор. Вейерштр.

<u>Но</u>! нет рефлексивности

$\Rightarrow$ т. Вейерштр. не выполняется.



сгладим $\Rightarrow$ непрерывн.

$J_* = -2$ $\quad (\underset{\text{интеграл}}{-1} - \underset{\text{интеграл}}{1})$

$J(u_*) = -2$ – так сказать не можем, т.к. в нашем шаре только непр. ф-ии

У нас нижн. грань $\underset{(-2)}{}$ <u>не достигается</u>.

С теор. Вейерштр $\longrightarrow$ метрич. вариант $\longrightarrow$ слабый вар-нт

Переходим с точки зрения минимизации.

<u>Теор. Арцела</u>

иллюстрац. метрич. варианта т. Вейерштр.

$$U = \{ u = u(t) \in C[a,b] : \; |u(t) - u(\tau)| \le L|t-\tau| \;\; \forall t,\tau \in [a,b] \}$$

усл. Липшица.

$$|u(a)| \le M$$

$\Rightarrow$ <u>U - компактн. мн-во в метрике C</u>.

А C - не гильб. пр-во, нет скал. произв.

<u>Д-во</u>:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{т. Арцела : мн-во равн. огранич. + равностеп. непрер} \\ \Rightarrow \text{можно выдел равном. сходящ. подпосл. непрер ф-ий} \end{array} \right\}$

$$|u(t+\Delta t) - u(t)| \le L|\Delta t| < \varepsilon \;, \; |\Delta t| \le \frac{\varepsilon}{L} = \delta \; \Big\} \Rightarrow \text{равност. непрер}$$

$\forall$ ф-ии $\exists\, \delta$: в равной степени $\forall$ ф-ии

равном. огранич.: $|u(t)| = |\underbrace{u(t) - u(a)}_{\le L|t-a|} + \underbrace{u(a)}_{\le M}| \le L(b-a) + M = C$.

$\Rightarrow$ т. Арцела ~~$\exists \{u_k\} \in V$~~

$\forall \{u_k\} \in V \ \exists \{u_{k_r}\} \xrightarrow{\|\cdot\|_C} u(t)$ — непрер.

д-м, что $u(t)$ удовл. усл. Липш. + равном. огр-сти,

т.е. что $u(t) \in V$

$|u_{k_r}(t) - u_{k_r}(\tau)| \leq L\,|t-\tau|$

$u_{k_r} \underset{\text{равном}}{\rightrightarrows}$ $\Rightarrow$ соверш. предельн. переход

$u(t) - u(\tau) \leq L\,|t-\tau|$ $\Rightarrow$ удовл. усл. Липш.

$|u_{k_r}(a)| \leq M$

$\downarrow$

$|u(a)| \leq M$

$\Longrightarrow u(t) \in M$.

компактность доказана !!!

$\Rightarrow$ <u>метрич. теор</u>. тоже хороша

<u>Теорема Вейерштрасса для квадратичной функции (функционала)</u>

<u>H, F — гильбертовы пр-ва</u>

$J(u) = \|Au - b\|^2_H$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $b \in F$

пр-во непрер. линейн. операторов

— квадратичн. ф-ция

H может равняться F

NB:
$J(u)$ - слабополунепр. снизу в H.

д-во: Берем $\forall \{u_k\} \xrightarrow{сл.\, в H} u \overset{?}{\Longrightarrow} \underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$

$u_k \xrightarrow{сл.\, в H} u \Rightarrow Au_k \xrightarrow{сл.\, в F} Au \Leftrightarrow \forall f \in F \quad (f, Au_k)_F \overset{?}{\to} (f, Au)_F$ ↓д-во

$(f, Au_k)_F = (\underbrace{A^* f}_{=c}, u_k)_H$, где $A^* \in \mathcal{L}(F \to H)$.

$\xrightarrow{сл.\, H} (c, u) = (A^* f, u)_H = (f, Au)_F$

$\{A^{**} = A\}$

$\Rightarrow$ есть слаб.-ск-сть

$g(f) = \|f\|_F^2$ - слабополу~~непр.~~ непрер. снизу ф-ия

$\Rightarrow \underline{\lim}\, J(u_k) = \underline{\lim}\, \|\underbrace{Au_k - b}_{\to Au - b}\|_F^2 \geq \|Au - b\|_F^2 = J(u)$

$\Rightarrow$ квадр. ф-ия - слабополунепрер. снизу

$\Rightarrow$ можно рассм. зад. минимизации

$J(u) = \|Au - b\|^2$ на $u \in U \subset H$

если U - $\underbrace{\text{выпукл., замкн., огранич.}}_{\text{слабокомпактн}}$ мн-во

$\overset{E}{\Longrightarrow}$ 1) $J_* > -\infty$

вывода из Т. Вейерштр.

2) $U_* \neq \emptyset$

3) $\forall$ min. пос $\xrightarrow{сл.} U_*$

21

Теорема Вейерштрасса для терминального ф-ла. Задача оптимального управления

(1)
$$J(u) = |x(T,u) - b|^2 \to \overset{inf}{\min}$$
хотим минимизир.

размерности

(2)
$$\begin{cases} \dot{x}^{n}(t) = A^{n\times n}(t)\, x^{n}(t) + B^{n\times n}(t)\, u^{n}(t), & t_0 \le t \le T \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$
– зад. Коши. (линейна по u)

Управление, кот. надо выбирать из усл-я $\min J(u)$

$J(u)$ – терминальн. ф-л.

$Au = x(T,u)$

Д-ть, что $A \in \mathcal{L}(H \to F)$.

Самим надо подбирать траектор., ...

(3) Пусть $u = u(t) \in V \subseteq L_2^{r}[t_0,T]$ – гильб. пр-во. ← размерность r

$u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$.

$u^i(t) \in L_2[t_0,T]$

$$(u,v)_{L_2^r} = \int_{t_0}^{T} \underbrace{\sum_{i=1}^{r} u^i(t) v^i(t)}_{= (u(t),v(t))_{E^r}} \, dt$$

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)_{L_2^r}} = \sqrt{\int_{t_0}^{T} (u(t))^2_{E^r}\, dt}$$

L_2^r – полн. пр-во (компд. коорд. су полн. пр-ва) $\Rightarrow$ гильбертово

20.09.2006. Лекция №3

$J(u) = \|Au - b\|_F^2$; $\quad A \in \mathcal{L}(H \to F)$

$\quad u \in U \subset H$

$Au = x(T,u)$

в нашей зад. $H = L_2^r[t_0, T]$ Сами выбир. H и F в завис. от задачи

$F = E^n$

Обобщим понятие реш-ия

<u>Опр</u>: Реш-ем зад. (2), соответствующ. управлению $u \in L_2^r$, наз. ф-ия $x(t,u)$:

1) непрерывна на $[t_0, T]$

2) явл. реш-ем инт. ур-я Вольтерра-IIр:

$$x(t,u) = \int_{t_0}^{T} [A(\tau)x(\tau,u) + B(\tau)u(\tau)]\, d\tau$$

принцип. сжим. отобр.

обозн. $\hat{A}u = x(t,u)$ будет сжатие

$A(t), B(t)$ – кус. непрерывны

$\Rightarrow$ реш-е зад. (2) $\exists!$

Д-м, что $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, т.е. A – лин., ~~непрерывен~~ огранич.

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v \qquad \forall u, v \in H \quad \forall \alpha, \beta \in R$$

Д-во:

$$x(T, \alpha u + \beta v) = \alpha x(t, u) + \beta x(t, v)$$

траектория, T, отвеч. управл-ю $\alpha u + \beta v$

$\|$ $\qquad\qquad \downarrow$

$\int \dots \qquad\qquad \int$

инт. Вольтерра

получ.

$\Rightarrow$ линеен.

огранич: $\|Au\|_F \le C\|u\|_H$ (*)

$$(4) \Rightarrow \underbrace{|x(t,u)|}_{\le \varphi(t)} \le \underbrace{\|A(t)\|_C}_{a} \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{|x(\tau,u)|}_{\varphi(\tau)}\, d\tau + \underbrace{\|B\|_C \cdot \int_{t_0}^{T} |u(\tau)|\, d\tau}_{b}$$

$A(t), B(t)$ – кус. непрер, $\|A(t)\|_C = \sup\limits_{t_0 \le t \le T} |A(t)|$

метод Рунга?

$$0 \le \varphi(t) \le \underset{\ge 0}{a} \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau + \underset{\ge 0}{b}$$

$$\Rightarrow 0 \le \varphi(t) \le b\, e^{a(t-t_0)} \le b\, e^{a(T-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$\Rightarrow |x(t,u)| \le \|B\|_C \int_{t_0}^{T} |u(t)|\,dt \cdot e^{\|A\|_C (T-t_0)}$

$\|x(\cdot,u)\|_C \quad \forall t \in [t_0, T] \qquad = C \qquad \underline{\underline{(5)}}$

ог. сильное нер-во

$x(\cdot, u)$ – вся ф-ия само в целом!

$x(t,u)$ – зн-ие ф-ии в момент t

Подстав. вместо $t \to T$

$$\underbrace{|x(T,u)|}_{=\|Au\|} \le C \int_{t_0}^{T} \underbrace{|u(t)|}_{=1\cdot|u(t)|}\,dt \le C\sqrt{T-t_0}\left(\int_{t_0}^{T} |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$= C_1 \|u\|_{L_2^r}$$

д-ие огранич.

д-во слаб. непрерывность.

надо, чтобы U было слабокомп. в L_2^r, т.е. выпукл, замкн, огранич

2 примера слабокомп. в L_2^r мн-в:

1) $U_1 = \{ u = u^r(t) \in L_2^r [t_0, T] : \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L_2^r} \le R \}$

– шар в L_2^r – выпукл., замкн., огранич. $\Rightarrow$ слабокомп. в $L_2^r [t_0, T]$

(мы знаем, что в $\forall$ гильб. пр-ве шар – слабокомп. мн-во)

25

2) $U_2 = \{ u = u^r(t) \in L_2^r [t_0, T] \ : \ \alpha_i(t) \le u^i(t) \le \beta_i(t) \ , i=\overline{1,r} \}$
$= (u^1(t), \dots, u^r(t))$

r штук скалярных нер-в

$\alpha_i(t), \beta_i(t) \in L_2 [t_0, T]$

пр: $\alpha_i(t) = -1$ $\Rightarrow |u^i| \le 1$
$\beta_i(t) = +1$

Проверим выпуклость, замкнутость, огр-сть.

Берем 2 управления $u(t), v(t) \in U_2$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i \le u^i(t) \le \beta_i \quad * \alpha \\ \alpha_i \le v^i(t) \le \beta_i \quad * (1-\alpha) \end{array}\right| \oplus \quad \forall i = \overline{1,r}$$

$\forall \alpha \in [0,1]$

(берем одинак. α_i, β_i)

$$\alpha_i \le \alpha u^i + (1-\alpha) u^i \le \beta_i \qquad \forall i = \overline{1,r}$$

$\Rightarrow \alpha u + (1-\alpha) v \in U$ выпукл.

$u_k \in U$, $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L_2^r}} u$. д-м, что $u \in U$ $\Rightarrow$ замкн.

Теорема: $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L_2^r}} u \Rightarrow \exists\, u_{k_r}(t) \xrightarrow{\text{почти всюду}} u(t)$
из Колмог-Фомин подпосл.

—//— если ск-сть по мере ↗

без д-ва.

см.

по теореме

$\alpha_i(t) \le U_{k_r}(t) \le \beta_i(t)$. для почти всех t

перех. к пределу почти всюду $r \to \infty$

$\alpha_i(t) \le U(t) \le \beta_i(t)$ $\Rightarrow$ замкнутость $\Rightarrow u \in U$.

$|u^i(t)| \le \max\limits_{\substack{0 \le t \le T \\ i}} \{|\alpha_i(t)|, |\beta_i(t)|\} \in L_2[t_0, T]$

$\|u^i\|_{L_2^r} \le const \Rightarrow \|u\|_{L_2^r} \le const$ $\Rightarrow$ огранич.

$\Rightarrow U_2$ — слабо-комп!

Если $u \in U_1, U_2$, $\forall$ др. слабо компактного мн-ва

$\Rightarrow$ справедл. теор. Веерштр, т.к. inf. достигается
нижн. грань

$\left\{ \begin{array}{l} r \to \infty \\ \forall \min. \text{посл} \to u_* \end{array} \right.$

см прошл. лекц.

Рассм. $J(u)$ —//—

$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\, x(t) + B(t)\, U(t) + f \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Выдел. кусок, комп. подх. к пред. зад.

$x(t,u) = x_1(t,u) + x_2(t,u).$

$x_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + Bu \\ x_1(t_0) = 0 \end{cases}$

$x_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = Ax_2 + f(t) \\ x_2(t_0) = x_0. \end{cases}$

$$J(u) = |x_1(T,u) + x_2(T) - b|^2 = |x_1(T,u) - b_1|^2,$$

$b_1 = b - x_2(T).$

Теорема Вейерштрасса для интегр. функционала.

(1) $J(u) = \int_{t_0}^{T} |\hat{x}(t,u) - b(t)|^2 dt \to \inf$

$b(t)$ – заданная ф-ция в $L_2^n[t_0,T]$

$\hat{x}$ – n-мерн. вектор.

(2) $\begin{cases} \dot{x} = A^{n\times n}_{(t)} x^n + B^{n\times r}(t) u^r(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$

$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0,T]$

Хотим, чтоб траект. во все моменты t была близка к заданному режиму в метрике L_2.

(интегр. $\approx$ такой же)

$F = L_2^n[t_0, T]$

$Au = x(t,u) = x(\cdot, u)$

линейность A –//– (линейность управлений $\Rightarrow$ линейн. траекторий)

огранич. $\|Au\|_{L_2^n} \le c\|u\|_{L_2^r}$

огранич. вытек. из тех же оценок (5) (из предыдущ. 5).

справедл. та же оценка (5):

$$\|x(\cdot,u)\|_{L_2^n[t_0,T]} \le C\|u\|_{L_2^r[t_0,T]}$$

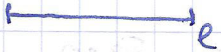
$$\int_{t_0}^{T} |Au|^2 dt \le \int_{t_0}^{T} \|x(\cdot,u)\|_C \, dt = (T-t_0)\|x\|_C \le \underbrace{(T-t_0)C}_{C_2}\|u\|_{L_2^r}$$

было: т. Вейерштр. для ОДУ, лин.

$\exists$ полно задач, связ. с УМФ

Над УМФ размышляя
Я сделал вывод – он таков
Пройдет, видно в начале мая
А в октябре пройдет любовь.

т. Вейерштр. для задач о нагреве стержня



Надо нагреть стержень, чтобы в момент T стержень обрёл распред. темпер.

$$J(u) = \int_0^l \left| y(T, x, u) - b(u) \right| dx$$

y — реш-е след. задачи:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (t, x) \in Q = [0, T] \times [0, l]$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$ теплоизолир. лев. конец.

$$\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=l} = -y\big|_{x=l} + u(t)$$ прав. конец — обмен со средой

$u(t)$ — темп. внешн. среды.

Эта зад. тоже влезит в наше реш-е.

$\alpha_{min} \le u(t) \le \alpha_{max}$

$$J(u) = \int_0^l |y(T,x,u) - b(x)|^2 dx \to \inf$$

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} \qquad (t,x) \in (0,T)\times(0,l) = Q \\ y_x|_{x=0} = 0 \\ y_x|_{x=l} = u(t) - y|_{x=l} \\ y|_{t=0} = 0 \\ u = u(t) \in L^2(0,T), \quad \alpha \overset{\text{п.в.}}{\le} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\le} \beta \end{cases}$$

чтобы 0 переводился в 0

т.к. гильб. пр-во

$J(u) = \|Au - b\|^2$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$

$Au = y(T;x;u)$; $H = L_2(0,T) \longrightarrow F = L_2[0,l]$

A – лин., т.к. зад. по перем. u – линейна

$\|Au\|_F \le C\|u\|_H$ огранич. Д-м:

Принц. мах. не годится, т.к. управление $u(t)$ – плохое

Умножим $y_t = y_{xx}$ на y, проинтегрир. по Q

$$\iint_Q y_t y \, dt\, dx = \iint_Q y_{xx} y \, dt\, dx$$

$$\iint_Q y_t y \, dt\, dx = \iint_Q \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(y^2)\, dt\, dx = \frac{1}{2}\int_0^l y^2\Big|_{t=0}^{t=T} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l y^2\Big|_{t=T} dx - \frac{1}{2}\int_0^l \underbrace{y^2\Big|_{t=0}}_{=0 \text{ нач. усл.}} dx = \frac{1}{2}\int_0^l y^2\Big|_{t=T} dx$$

$$\int_0^T\int_0^l y_{xx}\, y\, dt\, dx = \int_0^T \left(y_x y \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l y_x^2 dx \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left((u-y) y \Big|_{x=l} dt - \int_0^T \underset{0}{\underbrace{y_x}} y \Big|_{x=0} dt - \iint_Q y_x^2 dx\, dt = \int_0^T u y \Big|_{x=l} dt - \int_0^T y^2 \Big|_{x=l} dt - \iint_Q y_x^2 dx\, dt\right.$$

Итак, $\frac{1}{2}\int_0^l y^2(T,x,u)\,dx + \underbrace{\iint_Q y_x^2\,dx\,dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^T y^2\Big|_{x=l} dt}_{\geq 0} = \int_0^T u(t)\, y(t,l,u)\,dt \leq$

$\leq \left\{ ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \right\} \leq$

$\leq \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T y^2(t,l,u)\,dt$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^l y^2(T,x,u)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^T u^2_{(t)}\,dt$$

$$\|Au\|_F^2 \leq \|u\|^2_{H=L_2} \quad ; \; C=1$$

$\Rightarrow \|A\| \leq 1$; $\Rightarrow A$ - огранич

Итак, A - лин, огранич $\Rightarrow A$ - непрер.

Функционал $J(u)$ - хорош, $\Rightarrow$ выполн. все усл. слабой теор Вейерштр

$U = \{ \alpha \leq u(t) \leq \beta \}$ - вып., замкн, огранич

температура $\Rightarrow$ слабокомп (док-ся так же как и для U_2 в прошл. лекц)

Все выкладки проделаны, будто ∃ классич. реш-е y, а оно действит. ∃, если управление $u = u(t)$ – "хорошее" (что это такое см. Тихонов, Самарский)

хорош. управл. –
– плотн. мн-во в L_2

⇒ делаем в оценке ограниченности предельн. переход

∃ управл. u_n в L_2 для u в L_2: $\|u - u_n\|_{L_2} \longrightarrow 0$

– пример применения т. Вейерштр. для ур. теплопр. (сам. простое):
–//– в ур. теплопров.
Хотим к моменту T "успокоить" струну
Струна хар-ся 2мя коорд.: состояни, скорость
$\Rightarrow J(u) = \int\limits_0^l |y - b| + |y_t - c|$ ---

см. книгу, если интересно

33

раздел: Дифференцирование.

Пусть X, Y – нормированное пр-ва (м-б не полные)

Пусть $\exists$ отобр-е $F: X \to Y$

$$O_\varepsilon(x) = \{ z \in X : \| z - x \| < \varepsilon \}$$

ε-окр-сть точки x

<u>Опр</u>: скажем, что отоб-е F дифференцируемо в т. x, если $\exists$ лин. опер. $L = L(x) \in \mathcal{L}(X \to Y)$:

(1) $$F(\underbrace{x+h}_{\in O_\varepsilon(x)}) - F(\underset{\in O_\varepsilon(x)}{x}) = \underbrace{L(x)}_{F'(x) =} \cdot h + \underbrace{\alpha(h, x)}_{\bar{o}(\|h\|)},$$ $\forall h: x + h \in O_\varepsilon(x)$

так., что $$\frac{\|\alpha(h,x)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$$

это наз. производной и обозн. $F'(x)$

производная <u>Фреше</u> (сильная произв.)

!, если можно шагать в $\forall$ стор $\Rightarrow$ $\forall h \in$ $O_\varepsilon(x)$ важно

Пусть (1) выполн. – $L_1(x)$, $L_2(x)$

$$0 = (L_1(x) - L_2(x))h + \bar{o}(h)$$

$$\Rightarrow (L_1(x) - L_2(x))h = \bar{o}(h)$$

~~$\forall h \in O_\varepsilon(x)$~~ $\forall h: x + h \in O_\varepsilon(x)$

Фиксир. $\forall h$.

переменная t. $th: x + th \in O_\varepsilon(x)$ $\forall t: |t| < t_0$ при достат. малых t

$t\left[\,(L_1(x)-L_2(x))\,h\,\right] = \bar{o}(t)$

$\left[L_1(x)-L_2(x)\right] h = \dfrac{\bar{o}(t)}{t} \to 0$ лев. часть от t не завис

$\Rightarrow L_1(x)h = L_2(x)\cdot h \qquad \forall x \in X$

$\Rightarrow$ операторы равны (одинак. действ-ие одни и те же эл-ты)

Применим к понятию функционала

$J(u),\ u \in B$ — банах. пр-ва

$F = J$

$B = X \Rightarrow Y = E^1$

функционал: $\forall$ эл-ту $\to$ число

$Lx = F'_{(x)} \in \mathcal{L}(B \to E^1) = B^*$

пр-во линейн. непрер. функционалов

$\boxed{\begin{array}{l} L(x)\cdot h \\ \text{применение оператора к эл-ту} \\ \text{зн-ие оператора } L(x) \text{ на эл-те } h \end{array}}$

$\Rightarrow$ можем переформулир. это определение

$J(u)$ определено в $O_\varepsilon(u) = \{v \in B : \|v-u\|_B < 2\varepsilon$

$J(\cdot)$ - диффер в т. u, если $J(u+h) - J(u) \overset{\text{предст. в виде}}{=} \langle J'(u), h\rangle + \alpha(h,u)$

зн-ие лин. непрер. функционала

$\underset{\text{произв. по Фреше}}{J'(u) \in B^*}$, $\langle J'(u), h\rangle$ - $\overset{\text{лин. непрер}}{\text{зн-ие}}$ функционала $J'(u)$ на эл-те h

$\dfrac{\alpha(h,u)}{\|h\|_B} \to 0; \quad (\|h\|_B \to 0)$

~~$J'(u)\in B^* \longrightarrow Y_1 = E^1$~~

$$J'(u+h) - J'(u) = L(u)h + \bar{o}(\|h\|)$$

$$\| \quad J''(u)\in \mathcal{L}(B\to B^*)$$

$X = B$

$J'(u)\in B^*$ $\forall u$ (мн. непр. функционал)

$\Rightarrow Y$

$J'(u) : B \longrightarrow B^*$

$J''\in \mathcal{L}(B\to B^*)$ - линейный оператор!

Второй произв. по Фреше наз. оператор $J''(u) : B \to B^*$, для кот. справедливо след. соотношение:

В случ. гильб. пр-ва:

$B = H.$

H^* $\quad \forall f\in H^*$ $\overset{\text{по т. Рисса}}{\exists} \eta\in H : f(x) = \langle f, x\rangle = (\eta, x)_H$ — скал. произведение

$\Rightarrow H^* = H$

В этом случае $\langle \underbrace{J'(u)}_{\eta}, h\rangle$ есть настоящее скал. произведение (в опр. 1ой произв.)

Пусть $B = H = E^n$

$J(u) = J(u^1, \ldots u^n)$

$$J'(u) = \left(\frac{\partial J(u)}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial J(u)}{\partial u^n} \right) \in E^n = (E^n)^*$$

– направл-е ~~скорейшего~~ скорейшего возрастания ф-ии в данной точке

градиент

$(E^n)^* = E^n$ — Мы их отождествляем

вектор-строки — вектор-столбцы
(в тензорном анализе)

$$J''(u) = \left\{ \frac{\partial J(u)}{\partial u^i \partial u^j} \right\}_{i,j=\overline{1,n}}$$

матрица из 2х частных производных
(симметрична, т.к. все ф-ии тут хорошие)

$J''(u)$ – симметричный оператор. (без д-ва)
д-во в книге Шилова (проф. Мехмата)
Зорич "Мат. ан. том 2" – красивое простое д-во

$$\Rightarrow J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_{E^n} + \frac{1}{2} \big(\underbrace{\underbrace{J''(u)}_{\text{матр}} h}_{\text{вектор}}, h \big)_{E^n} + \bar{o}(\|h\|^2)$$

– симметричн. квадр. форма

— ф-ла Тейлора в конечномерн. случае.

Д/З: д-ть, что для ф-ии $J(u) = \sqrt{|xy|}$, $u = (x, y)$ в т. $u = 0$ имеет частн. произв., но не дифференцируема

част. произв. опред. за 2 направления
диффер-ся - за все направл.
тут - биссектриса.

4.10.2006.

$u \in H$ ← гильб. пр-во

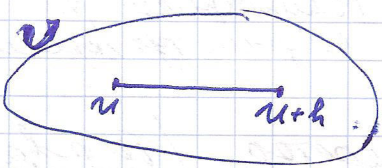
$$J(u+h) - J(u) = \langle \underbrace{J'(u)}_{\in B^*}, h \rangle + \frac{1}{2} \langle \underbrace{J''(u)}_{\in \mathcal{L}(B \to B^*)} h, h \rangle + \bar{o}(\|h\|^2)$$

H в гильб.

$\in \mathcal{L}(H \to H)$ в гильб.

если в гильб. пр-ве $\Rightarrow B^* = B$

Формулы конечных приращений



$u, u+h, [u, u+h] \in$ мн-ву U

$\Rightarrow$ введем ф-ию $f(t) = J(u+th)$, $0 \le t \le 1$

Продиффер. $f(t)$

$\exists$ Если $J(u)$ имеет 1ю произв $\Rightarrow \exists f'(t)$

$$f'(t) = \langle \underbrace{J'(u+th)}_{\text{внешн}}, \underbrace{h}_{\text{внутр}} \rangle$$ ← скал. произв

сложн. ф-ия

Если $J(u)$ имеет $J'' \Rightarrow \exists f''$

$$f''(u+th) = \langle \underbrace{J''(u+th)\underbrace{h}_{\in H}}_{\in H}, \underbrace{h}_{\in H} \rangle$$

Д-во: $f(t+\Delta t) - f(t) = J(\underbrace{\underbrace{u+th}_{\hat{u}}+\underbrace{\Delta t h}_{\hat{h}}}_{u+(t+\Delta t)h}) - J(\underbrace{u+th}_{\hat{u}}) =$

$$= \langle J'(u+th), \Delta t h \rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u+th)\Delta t h, \Delta t h\rangle + \bar{o}(|\Delta t|^2 \|h\|^2) =$$

скал.

линейн

$$= \Delta t \underbrace{\langle J'(u+th), h\rangle}_{f'(t)} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle J''(u+th)h, h\rangle}_{f''(t)} \Delta t^2 + \bar{o}(\|h\|^2 \Delta t^2)$$

ч.т.д.

$$J(u+h) - J(u) = f(1) - f(0) = f'(\theta)(1-0) = \int_0^1 f'(t)\,dt =$$

1 курс

скал.

$$= (J'(u+\theta h), h) = \int_0^1 (J'(u+th), h)\,dt$$

$$f'(1) - f'(0) = (J'(u+h), h) - (J'(u), h)$$ квадр. ф-ла

$$f''(\theta) = (J''(u+\theta h)h, h)$$

$$\int_0^1 f''(t)\,dt = \int_0^1 (J''(u+th)h, h)\,dt$$

Ещё одна ф-ла.

билинейн. ф-ла примен. к z

Д-м, что справедл: $\langle J'(u+h) - J'(u), z\rangle =$

$$= \langle J''(u+\theta h)h, z\rangle =$$

$0 < \theta < 1$,

$$= \int_0^1 \langle J''(u+th)h, z\rangle\,dt.$$

введем $F(t) = \langle J'(u+th), z \rangle \quad , 0 \le t \le 1.$

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \langle J'(u + \underbrace{(t+\Delta t)h}_{\underbrace{u+th}_{\tilde u} + \underbrace{\Delta t h}_{\tilde h}}), z \rangle - \langle J'(\underbrace{u+th}_{\tilde u}), z \rangle =$$

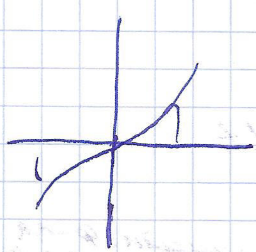
$$\cancel{= \langle J''(u+th) \Delta t h, z \rangle +} \quad = \langle J''(u+th$$

$$= \langle \underbrace{J''(u+th)\Delta t h + \underbrace{\bar o(|\Delta t|)}_{\in H}}_{\in H}, z \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle J''(u+th)\, h, z \rangle}_{F'(t)\ \text{(стоит при } \Delta t)} \Delta t + \underbrace{\bar o(|\Delta t|)}_{\in R}$$

$$\Rightarrow F(1) - F(0) = F'(\theta) = \int_0^1 F'(t)\, dt \qquad \text{ч.т.д.}$$

Рассм. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & , x \ne 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$



напишем разложение

$x = 0$

$x + h = 0 + h$

$$\underbrace{f(h)}_{h^3 \sin\frac{1}{h}} = \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{0}_{f''(0)} \cdot h + \frac{1}{2} \underbrace{0}_{f''(0)} \cdot h + h^3 \sin \frac{1}{h} = \underline{O}(h^3) = \bar o(h^2)$$

$f' \exists$

$f'' \nexists$!!! см $\circledast$

прямая: если $\exists f'(0), f''(0), \dots$
$\Rightarrow$ разложу.

$\exists$ Обратн. теор. Тейлора

Если $\exists$ разлож-е приращения

$$f(x+h) - f(x) = a_1(x) \cdot h + \frac{1}{2} a_2(x) h^2 + o(|h|^2)$$

$\Rightarrow a_1(x) = f'(x)$
$a_2(x) = f''(x)$

в общ. случае не верна

Обр. теор. Тейлора верна, если $a_1(x), a_2(x)$ — непрер. ф-ии
+ остат. член имеет равном. непрер-сть в окр-сти точки x $\quad \bar{o}(h; x)$

$\exists$ в книге Шилов „Мат. анализ"

$J(u) \in C^1(U)$ банах.
$C^2(U)$

$C^1(U)$ — мн-во ф-ий, диффер. по Фреше в $\forall$ т. $u \in U$ и эта произв-я $J'(u)$ непрер. по норме пр-ва H

$$\| J'(u+\Delta u) - J'(u) \|_H \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$$

$C^2(U)$ $\quad \exists J'(u), J''(u)$, $\quad \| J''(u+\Delta u) - J''(u) \|_{\mathcal{L}(H \to H)} \longrightarrow 0$

норма в операторной метрике.

$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u+\theta h), h \rangle$, $0<\theta<1$

ф-ла в общ. случ. не верна у $B \to B$ банах.

контр. пример: $J(u): H \to E^1$

$F(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} : \underset{H}{\underset{\shortparallel}{[0,1]}} \to E^2$.

$\Rightarrow$ эта ф-ла уже не верна

$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow F(1) - F(0) = 0 \neq F'(\theta) \cdot 1$

$F'(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2\pi t \\ \cos 2\pi t \end{pmatrix} 2\pi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ч.т.д.

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

Теор: $F: X \to Y$ $\quad \|F(u+h) - F(u)\|_X \le \sup\limits_{0\le\theta\le1} \|F'_{(u+\theta h)}\|_{\mathscr{L}(X\to Y)} \cdot \|h\|$

$\|F'(u+\theta h)\|_{\mathscr{L}(X\to Y)}$

д-во сложно (по т. Хана–Банаха)

$\exists$ в Колм.-Фомине.

$Y = E^1 \Rightarrow$ у нас верно!

($\forall$ эл-нт умеем сравнив. с $\forall$ эл-том

не пр-ве полного порядка нет)

E^1: мат.ан теор. Ферма, Ролля, Лагранжа $\not\Rightarrow$

Мы должны приветствовать будущее помня, что скоро оно станет прошлым, и мы должны с уважением относиться к прошлым достижениям помня, что в какой-то момент они представляли предел человеческих возможностям.

Джордж Сантаяна
(амер. философ и писатель 1863–1952.)

флюксия – произв.
флюента – интеграл } по Ньютону. учитель–Бароу.

интеграл, дифференциал – Лейбниц $\Sigma \to \{ \to \int$.

Производная квадратичной ф-ии.

$J(u) = \|Au - f\|^2_F \qquad A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $f \in F$

Д-м, что $J(u)$ – 2 жды дифференцируема

$$J(u+h) - J(u) = \|\underbrace{A(u+h) - f}_{Au - f + Ah}\|^2_F - \|Au - f\|^2_F =$$

$$\overset{\#}{=} 2\langle Au - f, Ah\rangle + \|Ah\|^2 =$$

$$= \langle \underbrace{2A^*(Au-f)}_{J'(u)}, h\rangle + \frac{1}{2}\langle \underbrace{2A^*A}_{J''(u)} h, h\rangle$$

$(Ah, Ah) = (A^*Ah, h)$

?!

по опр. $J'(u) = 2A^*(Au - f)$

43

$J'(u+h) - J'(u) \overset{\text{опр}}{=} 2A^*(A(u+h) - f) - 2A^*(Au - f) =$

$= 2A^*A h$ – элемент другого пр-ва

$J''(u)$

$\Rightarrow$ обр. теор. Тейлора в нашем случ. верна

J'' не завис. от u

$J''(u) = 2A^*A$.

11.10.2006.

(1) $J(u) = |x(T,u) - f|^2_{E^n}$. – функционал
пкт к мат.

(2) $\dot{x} = D(t)x + B(t)u(t)$, $t_0 \le t \le T$ – траектория

(3) $x(t_0) = 0$

(4) управление $u(t) \in L_2^r[t_0, T]$ – вектор.ф-ция.

(4*) $Au = x(T,u) \in \mathcal{L}(H \to F)$

где $H = L_2^r[t_0, T]$; $F = E^n$

будем учиться дифференцировать

Рассм. вспомогат. квадр. функционал $J(u) = \|Au - f\|^2_F$, $u \in H$

сопряж. оператор

$J'(u) = 2A^*(Au - f)$; $J''(u) = 2A^*A$. – не завис. от u.

Вопрос: что же такое A^*?

$\langle\ \ \rangle$ — скал. произв.

$\langle Au, c\rangle_F = \langle u, A^*c\rangle_H$ $\quad \forall u \in H$, $\forall c \in F$, $A^* \in \mathcal{L}(F \to H)$.

$A^* \in \mathcal{L}(\underset{\text{сопряженное пр-во}}{F^*} \to H^*)$ — в книгах!

Но по теор. Рисса отождествляем $F = F^*$, $H = H^*$

Оператор A^* выглядит так:

(5) $A^*c = \underset{\text{взята из ур-я}}{B^T(t)}\,\psi(t; c)$

реш-е зад. Коши: $\left.\begin{cases} \dot\psi = -D^T(t)\psi, \quad t_0 \le t \le T & (6) \\ \psi(T) = c & (7) \end{cases}\right\} \to \psi(t, c)$

как до этого можно дойти, потом

$$\langle Au, c\rangle_{E^n} \overset{(7)}{=} \langle Au, \psi(T)\rangle_{E^n} \overset{(4^*)}{=} \langle x(T, u), \psi(T, c)\rangle \overset{\text{ф-ла Ньют-Лейбн.}}{=}$$

$$= \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\langle x(t), \psi(t)\rangle_{E^n}\, dt + \overset{(3)}{\langle x(t_0), \psi(t_0)\rangle_{E^n}}_{=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left(\langle \overset{(2)}{\dot x}, \psi\rangle + \langle x, \overset{(6)}{\dot\psi}\rangle\right) dt = \int_{t_0}^{T} \left(\underbrace{\langle Dx + Bu, \psi\rangle}_{\langle Dx, \psi\rangle + \langle Bu, \psi\rangle} - \underbrace{\langle x, D^T\psi\rangle}_{\langle Dx, \psi\rangle}\right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi\rangle\, dt = \int_{t_0}^{T} \langle u, B^T\psi\rangle_{E^2}\, dt = \langle u, B^T\psi\rangle_{L_2^2}$$

$\Rightarrow A^T c = B^T\psi(t, c) \Rightarrow$ (5) $\qquad$ ч.т.д.

$J'(u) = 2A^*(Au - f)$ легко ли вычислять

Схема вычисления градиента.

1) пусть задано управление $u = u(t)$.
хотим вычислить градиент.
подставл. в (2) и реш. зад. Коши (2,3)

$u = u(t) \xRightarrow{(2),(3)} x(t,u)$ находим.

$x(T,u) = Au \Rightarrow \underline{Au - f}$ вычислили

$Au - f$ – аргумент оператора A^*

$\Rightarrow$ реш. (6,7) при $c = Au - f = x(T,u) - f$

$\Rightarrow$ получаем $\psi(t, c)$

$\Rightarrow B^T(t) \cdot \psi(t,c) \cdot 2 = \underline{\underline{J'(u)}}$

Итак, должно решить 2 зад. Коши – (2,3) и (6,7)

$\Rightarrow$ первую произв. вычисл. в терминах зад. Коши

J'': матрицы: произвед. 2х матриц

квадратичн. форма A^*Ah.

– не будем расшифров. (и использ. явно).

Дифференцирование интегрального функционала.

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} |x(t,u) - f(t)|^2 dt \qquad (1)$$

(2), (3), (4) —//—

(2) $\dot{x} = D(t)x + B(t)u(t)$, $t_0 \le t \le T$

(3) $x(t_0) = 0$

(4) $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$

~~$Au = x(t,u)$ ... $\in \mathcal{L}(H \to L_2^n[t_0,T])$~~ док-ли в начале курса

$Au = x(t,u) \in \mathcal{L}(H \to F)$

$H = L_2^r[t_0, T]$

$F = L_2^n[t_0, T]$

надо найти A^*.

Утв: Оператор A^* имеет такой же вид, как и выше, а ψ – реш-е другой зад-Коши, т.е. $A^* c = B^T(t)\psi(t, c)$,

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -D^T(t)\psi - \overset{n}{c}(t) & (6) \\ \psi(T) = 0 & (7) \end{cases}$$

g-во:

$$\langle Au, c\rangle_F = \int_{t_0}^{T} \langle x(t,u), \underset{\substack{\shortparallel(6)\\ -D^T\psi-\dot\psi}}{c(t)}\rangle_{E^n} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle x, -\dot\psi - D^T\psi\rangle_{E^n} dt = \{\text{по частям}\} = -$$

$$= -\underbrace{\langle x, \psi\rangle\Big|_{t=t_0}^{T}}_{\shortparallel 0} + \int_{t_0}^{T} \left(\langle \dot x, \psi\rangle - \langle x, D^T\psi\rangle\right) dt =$$

$x(t_0)=0$ (2)

$\psi(T)=0$ (7)

$$\overset{(2)}{=} \int_{t_0}^{T} \left(\langle Dx + Bu, \psi\rangle_{E^n} - \langle Dx, \psi\rangle_{E^n}\right) dt = \int_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi\rangle_{E^n} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle u, B^T\psi\rangle_{E^2} dt = \langle u, \underset{\substack{\shortparallel\\ A^*c}}{B^T\psi}\rangle_{L_2} \Rightarrow (5) \text{ чтд.}$$

Хотим вычисл. градиент в т. u $J'(u)$.

$u = u(t) \xrightarrow{(2,3)} x(t,u) \overset{(4)}{=} Au \overset{\text{вычисл.}}{\Rightarrow} Au - f \overset{\text{обозн.}}{=} c(t)$

подставл. c в (6), решаем (6,7) $\overset{\text{получ.}}{\Longrightarrow} \psi(t,c)$

$\Rightarrow B^T(t)\,\psi(t,c)_2 = J'(u)$

Как догадались? – выписыв. зад. Коши

с помощью мет. непр. коэф. конп. выр-ия (минн. слагаемое)

$$0 = \int_{t_0}^{T} (\underbrace{\dot x - Dx - Bu}_{\shortparallel 0}, \psi)\, dt = \{\text{преобраз.}\} = \langle \odot, \underset{=c}{\dot\psi + D^T\psi}\rangle + \langle \cdot, \overset{\shortparallel 0}{\psi(T)}\rangle -$$

$$- \langle u, \underset{\substack{\shortparallel\\ A^*c}}{\cdot}\rangle + \langle \odot, c\rangle$$

Объединяем ⊙ ⇒ получ. Д.У.
(+линик. все котор то обнуляем)

Градиент в задаче о нагреве стержня.

(1) $J(u) = \int_0^l |< y(T, x, u) - f(x)|^2 dt$

распредел. темпер. стержня

(2) $y_t = y_{xx}, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times (0,l)$

(3) $y_x|_{x=0} = 0$ поток $=0$

(4) $y_x|_{x=l} = \underset{\text{управлен}}{u(t)} - y|_{x=l}$ теплообмен с внешн. средой

(5) $\underset{t=0\,?}{y(0)} = 0$

$u = u(t) \in L_2(0,T]$

$H = L_2(0,T]$
$F = L_2(0,l)$.

(6) $Au = y(T, x, u) \in \mathcal{L}(H \to F)$ было док-но.

(7) $A^* c = \psi(t, l, c)$

(8) $\psi_t = -\psi_{xx}, \quad (t,x) \in Q$

$\psi_x|_{x=0} = 0$

(9) $\psi_x|_{x=l} = -\psi|_{x=l}$

(10) $\psi|_{t=T} = c(x)$

$t \to -t$ – та же задача, т.е. задача обычная, просто решается назад!

49

$\underline{D\text{-}60}$:

$$\langle Au, c\rangle_{\underset{L_2(0,l)}{\overset{\parallel}{F}}} = \int_0^l \overset{(6)}{y(T,x,u)} \cdot \overset{(10)}{\psi(T,x,c)}\, dx \overset{\text{ф-ла Ньютона-Лейбница}}{=}$$

$$= \int_0^l \Big[\int_0^T (y\psi)'_t\, dt + \underbrace{y\psi\Big|_{t=0}}_{(4),\,=0} \Big] dx =$$

$$= \iint_Q (\underset{(2)}{y_t}\psi + y\underset{(8)}{\psi_t})\, dt\, dx = \int_0^T\int_0^l (y_{xx}\psi - y\psi_{xx})\, dx\, dt =$$

$$= \{\text{по частям}\} = \int_0^T \Big[(y_x\psi - y\psi_x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \underbrace{(y_x\psi_x - y_x\psi_x)}_{=0} dx \Big] dt =$$

$$= \int_0^T \Big[(u - y|_{x=l})\psi|_{x=l} - y(-\varphi)|_{x=l} \Big] dt - \int_0^t \underbrace{(y_x\psi - y\psi_x)}_{(3),(9)\ =0}\Big|_{x=0} =$$

$$= \int_0^T \Big(u\psi|_{x=l} - \cancel{y\psi|_{x=l}} + \cancel{y\varphi|_{x=l}} \Big) dt = \int_0^T u\psi|_{x=l}\, dt =$$

$$= \langle u, \underbrace{\psi(t,l,c)}_{A^*c} \rangle_{L_2(0,T)} \Rightarrow (7).$$

Ситуац., как в случ. т. Вейерштр.

$u \in L_2 \Rightarrow$ класс. реш-е $\nexists$, $\exists$ обобщ. реш-е.

но $\forall$ управл $u(t)$ заменяем послед. $\{u_k\}$ – „хорошие" управления

$\|u_k - u\|_{L_2} \to 0$

у краев. задачи хорош., красивое реш-е

$\Rightarrow$ получ. $\langle Au_k, c\rangle = \langle u_k, A^*c\rangle$.

$k \to \infty \quad \Rightarrow \langle Au, c\rangle = \langle u, A^*c\rangle$.

(промежут. выкладки не надо, они для хороших ф-ий)

$y'(u)$:

Задаётся управл. $u = u(t) \xrightarrow[\text{краев. задача}]{(2,3,4)} y(t,x,u) \overset{\text{вычисл}}{\Rightarrow} y(T,x,u)$

$\Rightarrow$ вычисл f $\Rightarrow y(T,x,u) - f_{\xi} = c$ обозн $\xrightarrow[\text{краев зад}]{(8,9,10)} \psi(t,x,c) \Rightarrow 2\psi\Big|_{x=l} = y'(u)$

Если в (3), например, другие данные $\Rightarrow$ немного изменять уметь надо бы.

Производная Гато (нет в экз.)

$F: X \to Y$ (отобр-е)

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = F'(x,h)$$

аналог производн. по направлению

нелинейна по h

по разн. направл-ям м.б. разные скорости.

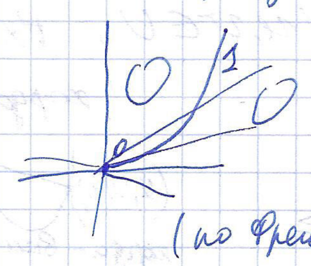
бывает, когда линейно по h, т.е.

$F'(x,h) \equiv \langle F'(x), h \rangle$

тогда то, что на этом месте наз. производной Гато

отлич. от произв. Фреше: если и не равном., но такое представл. однозначно, то тоже.

$\exists$ пример: $\exists$ произв Гато, $\nexists$ Фреше



везде степеней

по напр. направлению производная есть, а ф-ия разрывна ($\Rightarrow$ произв. по Гато — слабая произв.)

(по Фреше всегда ф-ия непрерывна)

∃ непрер. ф-ии: по Гато диффер., по Фреше нет

$\sqrt{|xy|}$ — не диффер. ни по Фреше, ни по Гато

по разн. направлениях разные производные, не представ. в виде $(f'(x), h)$

17.10.2006.

Элементы выпуклого анализа

Опр: Пусть U — мн-во из лин. пр-ва

U наз. выпуклым, если ∀ отрезок $[u, v] \in U$, если $u, v \in U$

$[u, v] = \{ w \in U : w = \alpha u + (1-\alpha) v \quad \forall \alpha \in [0,1] \}$

Опр 2: Ф-ия $J(u)$ зад-на мн-ве U наз. выпуклой на выпукл. U, если $J(\alpha u + (1-\alpha) v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v)$

$\forall u, v \in U, \quad \forall \alpha \in [0,1]$

выпукла

вогнута

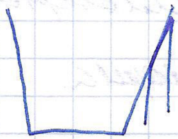
нер-во в др. стор. $\geq$

хорда

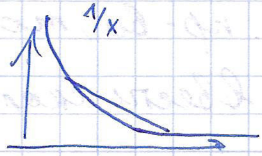
хорда — выше, чем график ф-ии.

Опр.3: Ф-ия наз. строго выпуклой, если строгое нер-во

$<$ $\forall \alpha \in (0,1)$ $\forall u \neq v$.



выпукл.
хорда = граф.



строго выпукл

Опр.4: Ф-ия $J(u)$ наз. сильно выпуклой, если

выполн.: $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) - \frac{1}{2}\varkappa \alpha (1-\alpha) \|u-v\|_H^2$

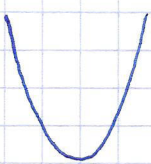
$\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall u, v \in U$

$\varkappa$ оказ. $2^й$ произв (~ф-ла Тейл.)

$\Big\{$ — // — $\|u-v\|^k$, $k>2$ $\Rightarrow$ равном. выпукл $\Big\}$

Сильновыпукл. ф-ии рассм. только в гильбертовых пр-вах

Пример:



$g(u) = \|u\|^2$ – сильно выпукл. в H

р-во:

$$\|\alpha u + (1-\alpha)v\|_H^2 \equiv \alpha \|u\|_H^2 + (1-\alpha)\|v\|_H^2 - \frac{1}{2}\underset{\varkappa}{(2)}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|_H^2$$

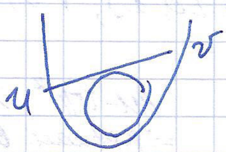
$\varkappa$ наз. константой сильной выпуклости.

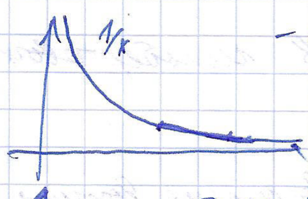
Не во всех банах. пр-ве ∃ сильно выпукл. ф-ия

<u>Гипотеза</u>: Если в некот. банах. пр-ве обнаруж. сильновыпукл. пр-во, то это пр-во — гильбертово, т.е. можно ввести скал. произв → норма

Если ф-ия диффер, произв. удовл-ет усл. Липш ⇒ верно док-но
Если убрать ⇒ пока не известно.

грубо говоря: у сильно вып. ф-ии м/у хордой и шар. можно впис. шар рад. $r \sim \underbrace{\rho(u,v)}_{\text{расстояние}}{}^2$.





— не сильно вып.
шар $r \sim |u-v|^2$ не впишем

↑ ф-ия строго выпукла, но не сильно выпукла.

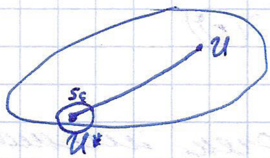
~~Теорема~~: ~~выпукла ф-ия на м~~

<u>Теорема 1 (о локальном минимуме)</u>:

I ф-ия $J(u)$ выпукла на выпуклом мн-ве U ⇒ ∀ точка лок. минимума на U будет точкой глобального минимума

Д-во: Пусть u_* - точка локального минимума.

$\xRightarrow{\text{по опр}}$ $\exists$ ε-окрестность $O_\varepsilon(u_*) \cap U = S_\varepsilon : J(u_*) \le J(u)$ $\forall u \in S_\varepsilon$.



u - $\forall$ точка $\in U$

$[u_* u] \in U$ по опр.

$$u_* + \alpha(u-u_*) = \alpha u + (1-\alpha)u_* \in S_\varepsilon \quad \forall\alpha \quad 0<\alpha<\alpha_0\le 1$$

α - маленьк $\Rightarrow$ останемся в S_ε

$\Rightarrow \cancel{J(u_*)} \le J(\alpha u+(1-\alpha)u_*) \le \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u^*)$

$\Rightarrow \alpha(J(u)-J(u^*)) + \cancel{J(u^*)}$

$0 \le \underset{\vee\, 0}{\alpha}(J(u)-J(u^*)) \Rightarrow J(u^*) \le J(u) \quad \forall u\in U$

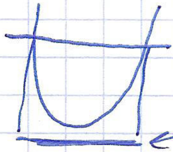
$\Rightarrow$ т. лок. мин. явл. точкой глоб. мин. ч.т.д.

Теорема 2: (о мн-ве Лебега выпуклой ф-ии):

Пусть $J(u)$ - выпукла на вып. мн-ве U

$\Rightarrow M(v) = \{u \in U : J(u) \le J(v)\}$ - мн-во Лебега

$M(v)$ - выпукло $\forall v \in U$



выпукло

Д-во: Рассм. $u, w \in M(v)$

$$J(\underbrace{\alpha u+(1-\alpha) w}_{U}) \le \underbrace{\alpha}_{\ge 0} \underbrace{J(u)}_{\le J(v)} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\ge 0} \underbrace{J(w)}_{\le J(v)} \le J(v).$$

ч.т.д.

Теорема 3 (выпуклость мн-ва точек минимума)

Пусть $J(u)$ - вып. на вып. мн-ве U

мн-во точек, где достиг. min

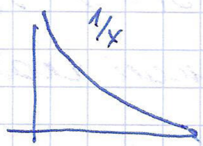
$\Rightarrow U_* = \{u \in U : J(u) = J_*(u) = \inf J(u)\}$ - выпукло (или пусто).

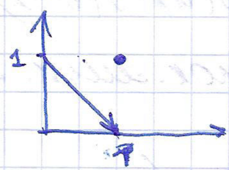
д-во:

$U_* = \{u \in U : J(u) \le J_*\}$ - мн-во Лебега, т.к. $=$ $J(u) = J_*$ (меньше J_* быть не может)

$\Rightarrow$ см. Т2 $\Rightarrow$ выпукл.

"пусто":





Теорема 4: Если $J(u)$ - строго выпуклая, то U_* - либо $\emptyset$, либо $U_* = \{u_*\}$ - единств. точка минимума

Если $J(u)$ - сильно выпукл. $\Rightarrow$ —"—

Д-во

Пусть $U_* \ne \emptyset$ и $u^*, v^* \in U^*$

$$J_* \le J(\alpha u_* + (1-\alpha) v_*) \le \alpha \underbrace{J(u_*)}_{= J_*} + (1-\alpha) \underbrace{J(v_*)}_{= J_*} = J^*$$

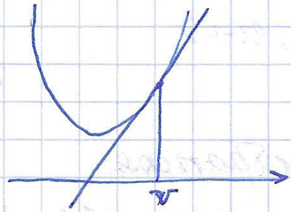
$\Rightarrow$ везде = равенство!

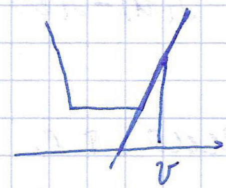
Если $u_* \neq v_*$, $\alpha \in (0,1)$ этого быть не может, т.к. ф-ия строго выпуклая $\Rightarrow$ противореч. $\Rightarrow u_* = v_*$.

ч.т.д.

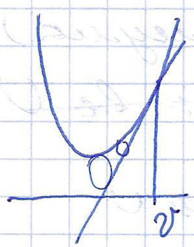
! Теорема 5 (теорема о касательной плоскости)

Пусть $J(u)$ – вып. ф-ия на выпукл. мн-ве U и $\exists\, J'(v)$, $v \in U$. Тогда $J(u) \geq \underbrace{J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle}_{=z}$ $\forall u \in U$





Теорема 6: Пусть $J(u)$ – сильно выпукл. на вып. мн-ве U и $\exists\, J'(v)$, $v \in U^{\in H}$ Тогда $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2}\varkappa \|u-v\|^2$, где $\varkappa$ – конст. сильной выпуклости, взят. из определения.



Д-во (обе теор. сразу): при $\varkappa = 0$ Т.6 $\longrightarrow$ Т.5

д-м т.6 $\forall \varkappa \geq 0$

Воспольз. определением сильной выпуклости:

перепиш. опр.

$$\frac{1}{2}\varkappa\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2 \le \alpha[J(u)-J(v)] + \underline{J(v)-J(v+\alpha(u-v))} =$$

опр. производной

$$= \alpha(J(u)-J(v)) - \langle J'(v), \overbrace{\alpha(u-v)}^{h} \rangle - \bar{o}(\alpha) \quad \forall\alpha\in[0,1]$$

$:\alpha$

$$\frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|^2(1-\alpha) \le J(u)-J(v) - \langle J'(v), u-v\rangle - \frac{\bar{o}(\alpha)}{\alpha} \quad \forall\alpha\in(0,1]$$

$\alpha\to 0$ $\qquad \xrightarrow{\alpha\to 0} 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\varkappa\|u-v\| \le J(u)-J(v) - \langle J'(v), u-v\rangle.$$

ч.т.д.

Эта теор. обратима, т.е. верна обратная.

T.7: ~~$J(u)$ - сильно вып. на вып. U и~~ $J(u)\in C^1(U)$

и нер-во выполн. $\forall u, v\in U$.

Тогда $J(u)$ - сильно вып. (или выпукла, если $\varkappa=0$)

Без док-ва.

Теорема 8: (необх. условие минимума):

~~Пусть $J(u)$ - выпукла на вып. мн-ве U~~,

~~пусть $U_* \ne \emptyset$~~

~~мн-во точек минимума~~

Пусть $J(u)$ - ф-ия на выпукл. мн-ве U, u_* - точка лок. минимума,

$\exists J'(u_*)$. Тогда ~~необх.~~ выполн. $\langle J'(u_*), u-u_*\rangle \ge 0 \ \forall u\in U$

(*)

Д-во:

По опр. лок. минимума: $J(u_*) \le J(u) \ \forall u\in S_\varepsilon = O_\varepsilon(u_*)\cap U$

$\forall u \in U \quad : u_* \to u_* + \alpha(u - u_*) \in S_\varepsilon$

$J(u_*) \le J(u + \alpha(\underline{u - u_*}))$ при всех достат. малых α

$= J(\alpha u + (1-\alpha) u_*)$

~~$0 \le J(\alpha u$~~ $\quad 0 \le J(\alpha u + (1-\alpha) u_*) - J(u_*) \overset{\text{произв}}{=}$

$= \langle J'(u_*), \alpha(u - u_*)\rangle + \bar{o}(\alpha) \qquad \forall \alpha : 0 < \alpha \le \alpha_1 \le 1$

мало

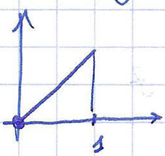
$: \alpha$

$0 \le \langle J'(u_*), (u - u_*)\rangle + \dfrac{\bar{o}(\alpha)}{\alpha} \qquad \forall \alpha \in (0, \alpha_1)$

$\dfrac{\bar{o}(\alpha)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \to 0} 0$

ч.т.д.

Пример: $y = x$, $x \in [0,1]$; $y' = 1$



мин. достигается.

$1(u - 0) = u \ge 0$

[произв. в точке минимума $\ne 0$?!

точка на границе, а там. произв. не обяз. $= 0$] !

Т-м: $u_* \in \operatorname{int} U \Rightarrow J'(u_*) = 0$

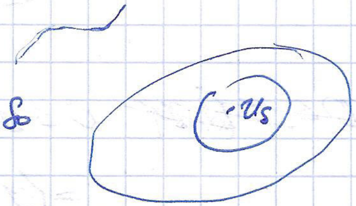
внутр. точка мн-ва U

Д-во

Утв: Если $u_* \in \operatorname{int} U$, то $(*) \Leftrightarrow J'(u_*) = 0$

$\forall h : u = u_* + \delta h \in U$ при $\forall \delta : 0 < \delta < \delta_0$ h-направление

маленьк



$(*) \Rightarrow \langle J'(u_*), \delta h \rangle \geq 0$ $\forall \delta : 0 < \delta < \delta_0$

$: \delta$: $\langle J'(u_*), h \rangle \geq 0$

Возьмём $h = -J'(u_*)$ $\underset{\text{предполагаем}}{\neq 0}$

$\Rightarrow -\|J'(u_*)\| \geq 0$ противореч.

$\Rightarrow J'(u_*) = 0$ чтд

произв. по направлению e : $\|e\| = 1$

$$\frac{dJ}{de} = \lim_{t \to 0} \frac{J(u+te) - J(u)}{t}, \text{ если } \exists$$

$$= \langle J'(u), e \rangle$$

у нас: $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$

$$\langle J'(u_*), \underbrace{\frac{u - u_*}{\|u - u_*\|}}_{e} \rangle \geq 0$$

$\Rightarrow$ у нас и есть произв. по направлению.

25.10.2006.

лок. мин ⇒ необх. выполн. $\langle J'(u_*), u-u_* \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U$ (1)

<u>Теорема 1</u> (критерий оптимальности) U – выпукл. мн-во,
Пусть $J(u)$ – выпукл. ф-ия $\in C^1(U)$, пусть $U_* \neq \varnothing$.
т. $u_* \in U$,

тогда $u_* \in U_* \iff$ (1)

<u>Д-во</u>: ($\Rightarrow$) очев. (см. пред. лекц.)

$u_* \in U_* \Rightarrow (1)$.

($\Leftarrow$) $(1) \Rightarrow u_* \in U_*$

по теор. о касат. пл-сти (провели и т. u_* кас. пл-сть) ф-ия выпукл.
$$J(u) \geq J(u_*) + \underbrace{\langle J'(u_*), u-u_* \rangle}_{\geq 0 \ \forall u \in U}$$

$\Rightarrow J(u) \geq J(u_*) \ \forall u \Rightarrow$ u_* – точка глоб. минимума.

ч.т.д.

недостатки: выпукл. мн-во U,
выпукл. ф-ия $J(u)$.

← мн-во U – не выпуклое.

не все направления явл. допустимыми для т. 0
(нет ни одной линии на самом деле)

61 т.к. когда выпуклости нет – плохо.

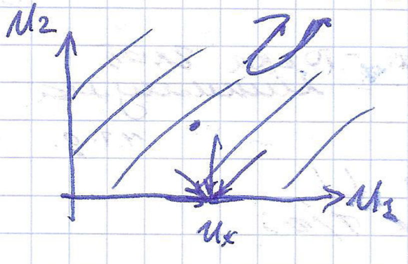
нер-во (1) наз. вариационным неравенством.
на месте произв. - может стоять оператор
$\langle A(u_*), u-u_* \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U$
у нас на месте A стоит градиент какой-то ф-ии.

Покажем, что на самом деле в (1) стоит равенство (нер-во решать не умеем.

<u>Пр</u>: $J(u) \to \inf$ — гладк. ф-ия.

$u \in U \equiv E_+^n = \{(u^1, \dots, u^n) = u \geq 0\}$ - все коорд. ≥ 0

(1) $\Leftrightarrow$ системе ур-ий: $u_*^i \dfrac{\partial J(u_*)}{\partial u^i} = 0, \ i = \overline{1,n}$



1) $u_* \in \operatorname{int} E_2^+$ (внутр.)
$\Rightarrow J'(u_*) = 0 \Rightarrow (1)$

2) $u_*^2 = 0$
$\Rightarrow$ по т. Ферма $\underbrace{\dfrac{\partial J(u^*)}{\partial u_1}}_{=0} \geq 0 \Rightarrow (1)$
(внутр. произв. по оси Ox)

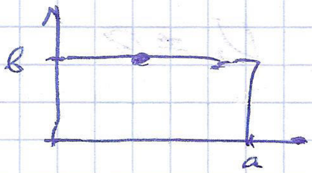
3) $u_*^1 = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial J(u^*)}{\partial u^2} \geq 0$
(по всем направлениям)
$\Rightarrow (1)$

4) $u_*^1 = u_*^2 = 0$
$\Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow (1)$

Для $n > 2$ — аналогично. ч.т.д.

Задача (Д/з):

$J(u) \to \inf \quad u \in U = \{\alpha_i \le u^i \le \beta_i,\ i = \overline{1,n}\}$



В общем случае тоже

~~(1)~~ ~~производная по касат. направлению, где граница гладкая~~

(1) $\Rightarrow$ $\begin{cases} u_* \in \operatorname{int} U \to J'(u_*) = 0 \\ u_* \in \text{гран.} \Rightarrow \begin{cases} \text{принадлежность границе (ур-ия)} \\ \text{произв. по касат. направлению} = 0 \end{cases} \end{cases}$

в хорошем случае получим n ур-ий (без остриев, ...)

Условие оптимальности для квадратичного функционала.

$J(u) = \| Au - f \|^2$, $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $f \in F$.

гильб. пр-во

пусть $u \in U$ – выпукл. мн-во, $U_* \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$ справедливо (1)

$\{ J'(u) = 2A^*(Au - f) \}$

$\Rightarrow \langle A^*(Au_* - f), u - u_* \rangle_H \geq 0$

$A^* \in \mathcal{L}^*(F \to H)$

Наоборот: Если u_* удовл $\uparrow$ $\Rightarrow u_* \in U_*$, т.к. $J(u)$ выпукл

В случае терминальн. функционала

$J'(u) = 2B^T(t)\psi(t, C)$

матр.

$Au = x(T; u)$

$H = L_2^2[t_0; T]$; $F = E^n$

Тогда (1) $\Rightarrow \langle B^T(t)\psi(t, c), u(t) - u_*(t) \rangle_{L_2^2[t_0, T]}$

$\forall u \in U \subseteq L_2^2$

...

Задача (Р(3) -11- для интегр. функционала и задачи о нагреве стержня:

$J'(u) = \psi(t, l; c)$; $\int_0^T \psi(t, l, c)[u(t) - u_*(t)]\, dt \geq 0$

<u>Задачи:</u>

$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle$ (функционал Ритца)

$\in \mathcal{L}(H \to F)$

$A^* = A > 0$

$\Rightarrow J(u)$ - выпукл., $J'(u) = Au - f$; - проверить

$u \in H$ $\quad J'(u_*) = 0 \Rightarrow Au_* - f = 0$

$\Updownarrow$

$J(u) \to \inf_H$

Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых ф-ий.

<u>Теорема:</u> U - выпукл., замкн. мн-во из H (не обязат. ограниченное!!!)

$J(u)$ - сильно выпуклая, полунепрер. снизу по норме $\|\cdot\|$ (сильно)

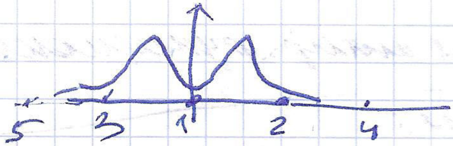
$\Rightarrow$ 1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq 0$ и $U_* = \{u_*\}$ - сост. из одной точки.

2) $\forall$ минимизир. послед. $\{u_k\}$: $J(u_k) \to J(u_*)$

$$\frac{1}{2}\varkappa \| u_k - u_* \|^2 \leq J(u_k) - \underbrace{J(u_*)}_{J_*}, \quad k = \overline{1, \infty}$$

т.к. сама послед. сх-ся к u_* !

Пр :



$J(u_k) \to 0$

$\{u_k\}$ расходится

Д-во

д-м при дополн. ограничении

$\exists\, J'(u)$ в какой-нибудь точке $\in U$

(не обяз. условие).

$M(v) = \{ u \in U : J(u) \le J(v) \}$ - мн-во Лебега

1) $M(v)$ - выпуклое (теор. 2 : мн-во Лебега выпукло у вып. ф-ии)

2). $M(v)$ - огранич. $\|\cdot\|$

нер-во Коши-Буняк.

$0 \le J(v) - J(u) \le -\langle J'(v), u-v \rangle \le \|J'(v)\| \cdot \|u-v\|$

$$\begin{cases} J(u) \ge J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle \\ J(v) - J(u) \le \dots \end{cases}$$

$\langle J'(v), u-v \rangle \le \|J'(v)\| \, \|u-v\|$

ф-ия сильно выпукл

$J(u) \ge J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2} \varkappa \|u-v\|^2.$

по теор. о касат. для сильно выпукл. ф-ии.

$$\frac{1}{2}\varkappa\|u-v\|^{\cancel{2}} \le \underbrace{J(u)-J(v)}_{\le 0} + \langle J'(v), v-u\rangle \le$$

нер-во К-Б

$$\le 0 + \|J'(v)\| \, \|\cancel{u-v}\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\varkappa}\|u-v\| \le \underbrace{\|J'(v)\|}_{\text{фикс.}} \qquad \forall u \in M(v)$$

$\Rightarrow M(u)$ попало в шарик рад $\|v-v\|$

$\Rightarrow$ огранич.

2) замкнутость

$\forall \{u_k\} \in V$, $\{u_k\} \xrightarrow{\|\cdot\|} u \in H$; $\underbrace{u \in M(v)}_{\text{д-ть}}$

проверим

$u \in U$; т.к. U — замкн. мн-во

$J(u_k) \le J(v)$, $k = 1, 2, \ldots$

$\lim\limits_{k\to\infty}$ В силу полунепр. снизу

$$J(u) = \underline{\lim} \, J(u_k) \le J(v) \quad \Rightarrow J(u) \le J(v)$$

$\Rightarrow M(v)$ — выпукло, замкнуто, ограничено

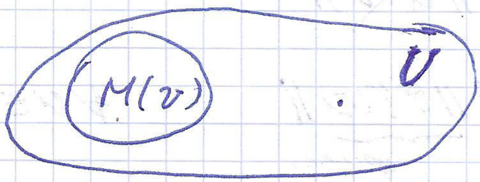
без д-ва?

$\Rightarrow$ слаб. компактность

$J(u) \to \inf,\ u \in U \iff$ зад. мини-мизации $J(u) \to \inf,\ u \in M(v)$

очев.

если $u \in M(v) \Rightarrow J(u) > J(v)$



на контуре $M(v)$ $J(u) = J(v)$

а к зад $J(u) \to \inf,\ u \in M(v)$

примен. слабый вариант теор. Вейерштр.
(вып.)

1) $J_* > -\infty$
2) $U_* \neq \emptyset$

Сильно выпуклая ф-ия $\Rightarrow$ строго выпукл.
$\Rightarrow U_* = \{u_*\}$ - сост. из ! точки.

д-ли 1ю часть теор.

$\underline{\text{д-м } 2^{ю}}$
тог.о кас.пл-сти

$$\frac{1}{2}\varkappa \|u-u_*\|^2 \leq J(u) - J(u_*) - \underbrace{\langle J'(u_*), u-u_* \rangle}_{\geq 0 \ \forall u \in U} \leq$$

т.к. (1).

$\leq J(u) - J(u_*) + 0 \quad \forall u \in U$

$\Rightarrow \{u = u_k\} \Rightarrow \frac{1}{2}\varkappa \|u_k - u_*\|^2 \leq J(u_k) - J(u_*)$

посл. кусок взяли $v = u^*$, т.е. предполож. $\exists J'(u^*)$ — это не обяз. В книге - д-во без использ. этого предположения.

ч.т.д.

По сравн. с предыдущ. теор. Вейерштр., здесь от ф-ии требуется куда больше, чем раньше, зато от мн-ва треб. куда меньше, чем раньше

(от U - не треб. огранич!!!
U м.б. всем пространством! $U = H$)

$J(u) = u^p$, $p \in \mathbb{R}$. где сильно выпукл.?! — вопр. на экз.

Критерии выпуклости и сильной выпуклости.

I критерий: Теорема 1

Пусть U — выпукл. множество у H, $\exists\ J(u) \in C^1(U) \Rightarrow J(u)$ выпукла $\Leftrightarrow$

$$\langle J'(u) - J'(v),\ u - v \rangle_H \geq 0 \quad \forall u, v \in U \qquad (1)$$

монот. градиент

$J(u)$ — сильно вып. $\Leftrightarrow \langle J'(u) - J'(v),\ u - v \rangle_H \geq \mu \|u - v\|^2,$

$\forall u, v \in U \qquad (2)$

$\mu = const > 0$

Теорема 2 (II критерий)

Пусть U — выпукл. мн-во у H, $\operatorname{int} U \neq \emptyset$, $J(u) \in C^2(U)$. Тогда

$J(u)$ — выпукла $\Leftrightarrow \langle J''(u) h, h \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in U,\ \forall h \in H$

2я произв. — это оператор; направл.

(3)

$J(u)$ — сильно вып. $\Leftrightarrow \langle J''(u) h, h \rangle_H \geq \mu \|h\|^2 \quad \forall u \in U,\ \forall h \in H$

$\mu = const > 0 \qquad (4)$

(1) обозн. монотонность $J'(u)$: $\big(f(x) - f(y)\big)(x - y) \geq 0$ — опр. монотонности

(2) сильная монотонность

(3) ~~критерий Сильвестра~~

квадр. форма неотрицательна $\forall$ фии $U \leftarrow$ матрица

(4) положит. определенность. критерий Сильвестра

1.11.2006. Лекция N.

Д-во 1ой теоремы (это можно списывать)

$\Rightarrow$ $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2} \varkappa \|u-v\|^2$ по т. о касат. пл-сти

$+$ $J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u \rangle + \frac{1}{2} \varkappa \|u-v\|^2$

$$0 \geq \langle J'(u) - J'(v), v-u \rangle + \varkappa \|u-v\|^2$$

$\mu = \varkappa \Rightarrow$ д-но

$\Leftarrow$ Пусть д-ны некот. ф-ия $J(u) \in C^1(V)$ выполн. (2)

Д. $\alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha) v) \geq \frac{1}{2} \varkappa \|u-v\|^2 \alpha(1-\alpha)$

надо д-ть

если д-м, что $\alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha) v) \geq \langle J'(z_1) - J'(z_2), z_1 - z_2 \rangle \overset{(2)}{\geq} \mu \|z_1 - z_2\|^2$

надо к этому привести.

итак, д-во $\swarrow$ можно списывать

$$\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v) - J(\underbrace{\alpha u+(1-\alpha)v}_{=u_\alpha}) =$$

$$=\alpha\Big(J(u)-J(u_\alpha)\Big)+(1-\alpha)\Big(J(v)-J(u_\alpha)\Big)=$$

$=\Big\{$ ф-ла конечн. приращений: $J(a)-J(b)=\int_0^1 \langle J'(\underbrace{b+t(b-a)}_{b+th}), \underbrace{a-b}_{h}\rangle dt \Big\} =$

$$=\alpha\int_0^1 \langle J'(u_\alpha+t(u-u_\alpha)), \underbrace{u-u_\alpha}_{(1-\alpha)(u-v)}\rangle dt + (1-\alpha)\int_0^1 \langle J'(u_\alpha+t(v-u_\alpha)), \underbrace{v-u_\alpha}_{-\alpha(u-v)}\rangle dt =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} u-u_\alpha=(1-\alpha)(u-v) \\ v-u_\alpha=-\alpha(u-v)\end{array}\right\} =$$

$$=\alpha(1-\alpha)\int_0^1 \langle J'(\underbrace{u_\alpha+t(u-u_\alpha)}_{z_1})-J'(\underbrace{u_\alpha+t(v-u_\alpha)}_{z_2}), u-v\rangle dt =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} z_1-z_2=t(u-v) \\ \Rightarrow u-v=\frac{1}{t}(z_1-z_2) \\ z_1,z_2\in U\end{array}\right\} = \alpha(1-\alpha)\int_0^1 \langle J'(z_1)-J'(z_2), \frac{1}{t}(z_1-z_2)\rangle dt \geq$$

$$\overset{(2)}{\geq} \alpha(1-\alpha)\int_0^1 \frac{1}{t}\mu\,\|\underbrace{z_1-z_2}_{t(u-v)}\|^2 dt = \alpha(1-\alpha)\underbrace{\int_0^1 t\,\mu\,\|u-v\|^2 dt}_{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\mu}{2}=\varkappa.$$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha)\mu}{2}\|u-v\|_2 \qquad \forall u,v\in U$$

ч.т.д.

$\Rightarrow$ ф-ии обе части.
(сильно)
$\Rightarrow$ вып. ф-ия имеет произв., кот. (сильно) монот. растёт

Теорема 2 (2й критерий вып. и сильно вып.)

Пусть U – вып. мн-во из H (из гильб. пр-ва), $\operatorname{int} U \neq \varnothing$

$J(u) \in C^2(U)$.

$J(u)$ – вып $\Leftrightarrow \langle J''(u)h, h\rangle \geq 0$ (3) $\forall u \in U$ $\forall h \in H$

$J(u)$ – сильно вып $\Leftrightarrow \langle J''(u)h, h\rangle \geq \mu\|h\|^2$. (4)

будем д-ть только по (4), т.к. (3) – это (4) при $\mu = 0$.

$\Rightarrow$

1) $u \in \operatorname{int} U$

$\forall h \in H$ $\quad u+\varepsilon h \in U \quad \forall \varepsilon: 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0(h)$

ф-ия сильновыпукл. $\Rightarrow$ подстав. в (2).

$\Rightarrow \langle J'(u+\varepsilon h) - J'(u), \varepsilon h\rangle \geq \mu\|\varepsilon h\|^2$

{ ф-ла конечн. приращ-ий для скал. произв (только для оператора не верна) }

$\langle J''(u+\theta\varepsilon h)\varepsilon h, \varepsilon h\rangle \geq \mu\varepsilon^2\|h\|^2$

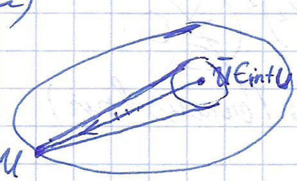
$\langle J''(u+\theta\varepsilon h)h, h\rangle\varepsilon^2 \geq \mu\varepsilon^2\|h\|^2 \qquad \varepsilon > 0$

$\langle J''(u+\theta\varepsilon h)h, h\rangle \geq \mu\|h\|^2$

$\varepsilon \to 0+0$; $J \in C^2 \Rightarrow \langle J''(u)h, h\rangle \geq \mu\|h\|^2$

2) $u \in \text{Гр}\, U$ (граница)

для вып. мн-ва



конус всех точек, кроме конца

и на прямой $[u, \bar{u}]$ $\exists$ послед $u_k \in \operatorname{int} U$:

$\langle J''(u_k) h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$ $\quad \forall k = 1, 2, \ldots$

$J'' \in C^2$

$\Rightarrow \langle J''(u) h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$. ч.т.д

выпуклость в док-ве важна! (много и-ных внутр. точек $\Rightarrow \nexists u_k$ ...

$\Leftarrow$ Пусть $J(u) \in C^2(U)$ и выполн. (4). Д-м, что $J(u)$ - сильновыпукл.

$\underset{\text{лев. ча сть (2)}}{\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle} = \{$теор. о среднем для вект. епол. произв$\} =$

$= \langle J''(\underbrace{v + \theta(u - v)}_{\bar{u}}) \underbrace{(u - v)}_{=h}, \underbrace{u - v}_{=h} \rangle \overset{(4)}{\geq} \mu \|u - v\|^2$

$\Rightarrow$ из (4) выполн (2) $\overset{\text{теор. 1}}{\Rightarrow} J(u)$ - сильновыпукл.
$\forall u, v \in U$

в достат. мн-во U может и не иметь внутр. точек.

<u>Пример</u>:

$J(u) = x^2 - y^2$, $u = (x, y)$.

$U = \{(x, y) \in E^2 : y = 0\}$

$J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\langle J''_{(u)} h, h \rangle = (h^1)^2 - (h^2)^2$ $\cancel{\geq 0}$

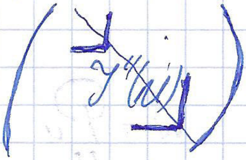
но $J(u)|_U = x^2$ - вып (сильно вып.). Дело в том, что $\operatorname{int} U = \emptyset$

Если $H = E^n$

Пусть $J(u) \in C^2(E^n)$ и выполн. усл. (3), т.е.

$\langle J''(u)h, h \rangle \geq 0$ — квадр. ф., неотриц., полож. опр. $\forall h \in E^n$

критерий неотриц. определенности оператора



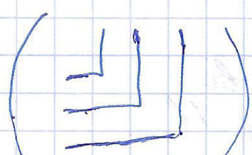
$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in E^n \Leftrightarrow$ все миноры, симметричн. относ. главной диагонали, неотрицательны.

если (4), т.е. $\langle J''(u)h, h \rangle > 0 \ \forall h \in E^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle J''(u)h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$

$\inf\limits_{\|h\|=1} \langle J''(u)h, h \rangle = \mu > 0 \Leftrightarrow \left\langle J''(u)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \right\rangle \geq \mu > 0$

крит. Сильвестра: все главн. углов. минора положительны



$J(u) = u^p, \ p \in \mathbb{R}$

Зад: $J(u) = ax^2 + bxy + cy^2 + dz^2$ Определить a, b, c, d, когда $J(u)$ — вып., сильно вып. в E^n

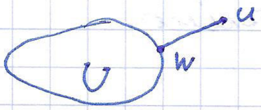
надо: выпис. миноры, ...

Проекция точки на множества и её св-ва

Опр: U — мн-во из H, т. $u \in H$. Скажем, что т. $w \in U$ явл. проекцией ~~т.~~ точки u, если

$$\|w-u\| = \inf_{v \in U} \|v-u\| = \rho(u, U)$$

$$w = P_U u$$



ближ. точек м.б. много

окр-сть

$\forall w \in$ окр. явл. проекцией т. u (центр окр-сти)

2 точки проекции

Св-ва:

Теор 1: U — выпуклое, замкнут. мн-во из H

$\Rightarrow \forall$ т. $u \in H$ $\exists!$ ~~проекция точки U~~ $P_U u$

Д-во: Рассм. $g(v) = \|v-u\|_H^2$ — сильно выпукл. на H, u — фиксир.

$$g(v) \to \inf_{u \in U}$$

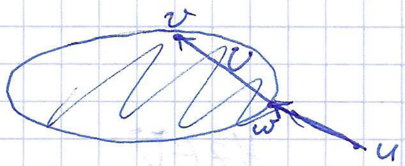
в силу т. Вейерштр. для сильно вып. ф-ции
inf достигается!

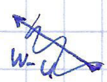
т.е. $\exists \underset{\in U}{w}: \ g(w) = \inf\limits_{v \in U} g(v)$

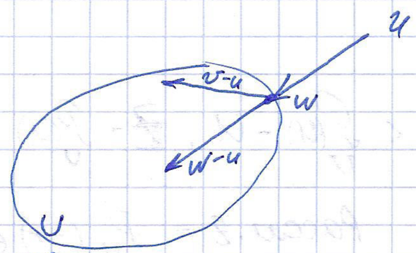
$\Rightarrow \|w-u\|^2 \leq \|v-u\|^2 \quad \forall v \in U$ ч.т.д.

<u>Теорема 2</u>: (характеристич. св-ва проекции):
пусть U − вып., замкн. мн-во из H

~~и ∃ только~~ $w = P_U u \iff \langle w-u, v-w \rangle_H \geq 0 \ \forall v \in U$







в теор. говорится,
что угол $\leq 90°$

<u>Д-во</u>: Рассм. $g(v) = \|v-u\|^2_H$ − вып, диффер.

~~$w = P_U u$~~ w − т. мин. $g(u)$ $\quad g'(u) = 2(v-u)$
$g'(w) = 2(w-u)$

Воспольз. критерием оптимальности

$\Rightarrow \langle g'(w), v-w \rangle \geq 0 \ \forall v \in U$

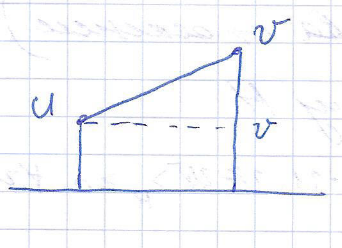
$\Leftrightarrow 2 \langle w-u, v-w \rangle \geq 0$

Теор. 3: Оператор проектирования (проектор) удовл. усл. Липшица с константой 1

U – вып., замкн. ц H.

$$\| P_U(u) - P_U(v) \| \le \| u - v \| \quad \forall u, v \in U.$$

Д-во:



(по строгого сжимания не будет).

$$< P_U(u) - u,\ z - P_U(u) > \ \ge 0 \qquad \forall z \in U$$

Рассм. $z = P_U(v) \in U$

$$< P_U(u) - u,\ P_U(v) - P_U(u) > \ \ge 0 \qquad \forall u, v$$

u, v – равноправно $\Rightarrow$ меняем местами

$$< P_U(v) - v,\ P_U(u) - P_U(v) > \ \ge 0$$

+

$$< \underline{P_U(u) - P_U(v)} - u + v,\ \underline{P_U(v) - P_U(u)} > \ \ge 0$$

нер-во К-Б

$$\| P_U(u) - P_U(v) \|^2 \le \ < P_U(u) - P_U(v),\ u - v > \ \le$$

$$\le \underbrace{\cancel{\| P_U(u) - P_U(v) \|}}_{\ne 0} \| u - v \|$$

$= 0 \Rightarrow$ "в лоб" выполн.

$$\Rightarrow \| P_U(u) - P_U(v) \| \le \| u - v \|.$$

ч.т.д.

8.11.2006

Теорема 4.

Пусть U - вып. замкн. мн-во, $J(u)$ - вып. и $\in C^1(U)$,
$U_* \neq \emptyset$.

Тогда $u_* \in U_* \iff u_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*)) \quad \forall \alpha > 0$

Д-во: из критерия оптимальности:

$$u_* \in U_* \iff \langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle \alpha J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U \ \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \langle \underbrace{u_*}_{w} - \underbrace{(u_* - \alpha J'(u_*))}_{u}, \underbrace{u}_{v} - \underbrace{u_*}_{w} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$$

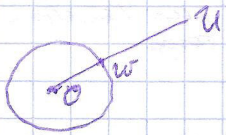
из Т-3 $\quad w = P_U(u) \iff \langle w - u, v - w \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U$

$\Rightarrow u_* \in U_* \iff w = u^* = P_U(u) = P_U(u_* - \alpha J'(u_*))$.

чтд

Примеры

① шар $\quad U = \{u \in H : \|u\| \leq R\}$



$$\Rightarrow w = P_U(u) = \begin{cases} \frac{u}{\|u\|} R, & u \notin U \\ u, & u \in U \end{cases}$$

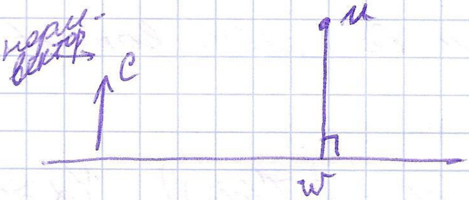
Проверим это (по критерию)

$\langle w - u, v - w \rangle = \langle \frac{u}{\|u\|} R - u, v - \frac{u}{\|u\|} R \rangle =$

$= \frac{\|u\| - R}{\|u\|} \left(\|u\| R - \langle u, v \rangle \right) \geq 0$

т.к. $\langle u, v \rangle \overset{К-Б}{\leq} \|u\| \|v\| \leq R\|u\|$.

② $U = \Gamma = \{u \in U : \langle c, u \rangle = \gamma\}$, $c \neq 0$



$\langle c, u \rangle = \gamma$ — гиперпл-сть

в гильб. пр-ве w — ближ. т.

$\bar{c} \parallel \overline{uw}$ (коллинеарность)

$\Rightarrow w = u + \alpha c$ $\langle c, w \rangle = \gamma$

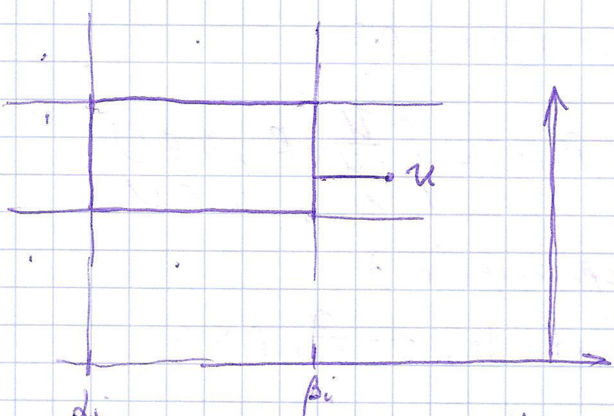
$$w = u + \frac{\gamma - \langle c, u \rangle}{\|c\|^2} c$$ — проверить д/з

$R = 0$ (для гиперпл-сти всегда).

③ параллелепипед

$U = \{u = (u^1 \dots u^n) : \alpha_i \le u^i \le \beta_i \; ; i = \overline{1,n}\}$

α_i, β_i — могут не быть конечными.



$u \notin$ внутри (она сама — проекция)

срезаем коорд.:

$$w^i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } u^i < \alpha_i \\ \beta_i, & \text{если } u^i > \beta_i \\ u_i, & \text{если } \alpha_i \le u_i \le \beta_i \end{cases}$$ $i = \overline{1,n}$

надо провер в n-мерн. случ - провер нер-во

$w = P_U(u) \Leftrightarrow \langle w-u, v-w \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U$

$(w^i - u^i)(v^i - w^i) \geq 0$

если $w^i = \alpha_i \Rightarrow u^i < \alpha_i$
$\quad v^i > \alpha_i \qquad \Rightarrow$ "+"·"+"

~~и так сразу провер~~ $\quad w^i = \beta_i \Rightarrow$ "−"·"−"

$w^i = u^i \quad \Rightarrow = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \quad \Rightarrow \langle w-u, v-w \rangle \geq 0 \quad$. ч.т.д.

④ $U = \{u = u(t) \in L_2^r[0,T] : \alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t), \ i = \overline{1,r}\}$

– гильберт. пр-во

$$w^i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t), & \text{если } u^i(t) < \alpha_i(t) \\ \beta_i(t), & \text{если } u^i(t) > \beta_i(t) \\ u^i(t), & \alpha_i(t) \leq u^i(t) \leq \beta_i(t) \end{cases} \qquad i = \overline{1,r}$$

$\Big(w^i(t) - u^i(t)\Big)\Big(v^i(t) - w^i(t)\Big) \geq 0$ для $t \in [0,T]$, $i = \overline{1,r}$

теперь $\int_0^t$ – // – // – $dt \geq 0$, т.к. подынтегр. функц ≥ 0

$\Rightarrow \langle w-u, v-w \rangle_{L_2^r[0,T]} \geq 0 \quad \forall v \in U$

есть ещё пара мн-в, где явно вычис. проекция.

80 каждый раз надо решать зад $g(v) = \|v-u\|_H^2 \to \inf, \ v \in U$ – на вып., замкн. U

Пример, когда наивный подход приводит к хорошим ошибкам: то, что верно в конечномерн. пр-вах не всегда верно в ∞-мерн. (пр: теор. о среднем

Гильбертов кирпич (буд экз.)

l_2 : Σ квадр. коорд - конечн

l_2 $U = \{u = (u^1, \dots, u^n, \dots) \in l_2 : |u^n| \le \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}$ — гильбертов кирпич.

U — 1) выпукло 2) ограничено $\Sigma \frac{1}{n^2}$ сх-ся 3) замкнуто (сх-ся $\Rightarrow$ по коорд. тоже сх-ся)

4) слабо-комп (замкн, огр.)

5) Есть ли внутр. точки? **нет**.

$0 \notin \operatorname{int} U$ (0 - не явл. внутр. точкой)

$\operatorname{int} U = \emptyset$.

Рассм. направление $e = (1, \frac{1}{2^{3/4}}, \dots, \frac{1}{n^{3/4}}, \dots) \in l^2$

$\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)^2 = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ сх-ся

$0 + \varepsilon e \in U$? $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

отходим от 0 по этому направл. на ε.

Покажем, что $0 + \varepsilon e \notin U$

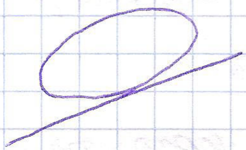
$\varepsilon e = (\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2^{3/4}}, \dots, \frac{\varepsilon}{n^{3/4}})$

$\frac{\varepsilon}{n^{3/4}} \le \frac{1}{n}$ $\forall n$ (если т. $\in U$)

$\underbrace{\varepsilon}_{const} \le \frac{1}{n^{1/4}} \to 0$ ⇒ вдоль направления e можно попасть в гильб. кирпич

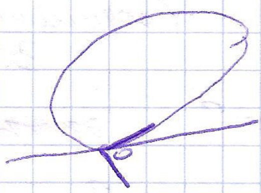
Пр 2: в n-мерн. пр-ве E^n

в $\forall$ т. границы вып. мн-ва можно провести опору



Для гильб. кирпича это не верно

В $\underset{\text{гильб. кирпич}}{U}$ через т. 0 нельзя провести опорн. плоск



во все стороны направлены "иголки"

кирпич 2002 г. Васильев? стр. 533-534 д-ва

⇒ принц. max. не верно для бесконечномерн. пр-вах (Понтрягин) см. гильб. кирпич

То, что я понял, прекрасно. Из этого я заключаю, что остальное, чего я не понял, тоже прекрасно.

высказывание Сократа (по поводу неясности у Гераклита)

Методы ~~минимизации~~ (оптимизации)

Кто пойдет на поле за ворота,
То обратно вернётся опять
Словно ищет в потемках кого-то,
Но не может никак отыскать

М. Исаковский
(Одинокая гармонь)
30е гг.

Что искал гармонист? — экстремум

Почему в потемках искал? не было образования ни ВМК, ни ММ ⇒ в потемках

каким методом? Научный, многошаговый (идет за ворота, обратно)

Общие соображения

Задача: $J(u) \to \inf$, $u \in U \subseteq H$ — гильб.

u_k — изв

$u_{k+1} = u_k + \alpha p_k^{\in H}$ $\quad J(u_{k+1}) < J(u_k)$ — монотонный метод (может и не быть монот.).

1) p_k — направл. кот. не должно выходить за пределы U
α — длина шага } согласовано

2) u_0 — нач. точка. Нет общих правил, как брать нач точку (эвристич. соображения — физич, хим, … — помогают)

иногда не можем сказать пусто ли множество и не можем ни одной точки взять (можем перебирать в предположениях о мн-ве U)

3) $U \neq \varnothing$? — кажд. раз отдельно обсуждать

4) До каких пор продолжать — когда остановка?

Только эвристич. соображения

($J(u_{k+1}) - J(u_k) < \varepsilon$ — зн-е ф-ий близко; можно $\|u_{k+1} - u_k\| \leq \delta$ — точки близкие

можно: подряд 10 шагов, нет сдвига $\Rightarrow$ остановка

можем и ошибиться.

5). сходимость? надо д-ть, что для какого-то мн-ва метод сх-ся. + скорость сх-сти.

чем шире класс, в кот. сх-ся, тем лучше.
Сх-сть желательно иметь хоть для какого-то класса ф-ий

б). устойчивость (метод должен не реагир. на малую погрешности - ошибки.)
надо исслед., как метод себя ведет при погрешн.

Мы рассм. 1шаг. метод (при формиров. (k+1)-го приближ., пользуемся только u_k.)

$u_{k+1} \in A(u_k, u_{k-1}, \ldots)$ - многошаг. многозначн. отобр-ия

по $u_k, u_{k-1}, \ldots$ формир. какое-то мн-во, из него берем u_{k+1}.

Бывают непрер. методы, когда вместо $u_{k+1} = u_k + \alpha p_k$ надо решать какие-либо Д.У.

Градиентный метод.

(предлож. Коши)

самый древн. метод после перебора

$J(u) \to \inf, u \in H$ (1) (на всем пр-ве ищем минимум) !

$J'(u) \in C^1(U)$

для таких задач град. метод

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k \underbrace{J'(u_k)}_{p_k}, \quad k=0,1,\dots \qquad (2)$$

антиградиентн. направл. – локально указ. направл. нах. спуска / подъема ф-ии.

$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + o(\|h\|)$ ← при маленьк. h пустяк

$-\|J'(u)\|\|h\| \le \langle J'(u), h \rangle \le \|J'(u)\|\|h\|$

рав-во $\Leftrightarrow$ $J'(u) \parallel h$, т.е. $h = \alpha J'(u)$

min $\Rightarrow$ двигаемся $\leftarrow$ $\Rightarrow$ антиградиент

{ Коши ввел теорию пределов: 1815 – 1820 г. }

как выбирать α_k (направление уже выбрали)

1). скорейший спуск: $J(u_k - tJ'(u_k)) = f_k(t) \to \inf\limits_{t>0}$

идем до макс. глубины антиградиента.

нехорошо! Градиент действ. только в близ. области к u_k (в далёких точках уже свои градиенты).

2) $\alpha_k = \alpha$. (постоянный шаг)

3). α_k и смотрим $J(u_{k+1}) < J(u_k)$

~~ка~~ эвристич. метод (дробление α_k)

Рассм. 2 случай: $\alpha_k = \alpha$. (3)

Теорема (сх-сти): пусть $U = H$; $J(u)$ — сильновыпукла,
$J(u) \in C^1(H)$,

$\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u - v\|$ — условие Липшица на градиент.

$\Rightarrow$ метод (2,3) сх-ся при
где $\alpha_k = \alpha \in \left(0, \frac{2\mu}{L^2}\right)$

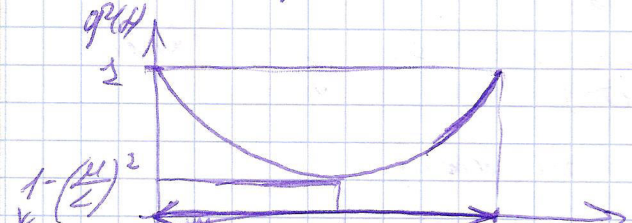
μ — константа сильной выпуклости
$\langle J'(u) - J'(v)\rangle \ge \mu\|u - v\|^2$, $\mu > 0$
æ

и при $\forall u_0$
сх-ся к u_* — т. min

скорость сх-сти $\|u_k - u_*\| \le q^k \|u_0 - u_*\|$ $k = 0, 1, \dots$

$q = \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2} < 1$

$$q^2 = 1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2 = q^2(\alpha)$$



$\mu \le L$

$\langle J'(u) - J'(v)\rangle \ge \mu\|u - v\|^2 \Rightarrow \mu\cancel{\|u - v\|^2} \le L\cancel{\|u - v\|^2}$

$0 < q < 1$ (т.к. 1 не достиг., т.к. отрезок — интервал)

$q_* = \sqrt{1-\left(\frac{\mu}{L}\right)^2}$

$\mu = L \Rightarrow$ сх-сть наивысшая

15.11.2006.

<u>град. метод</u>

$J(u) \to \inf$, $u \in \underline{H}$ во всем пр-ве

$u_{k+1} = u_k - \alpha J'(u_k)$.

$u_* - \exists$ (по т. Вейерштр. для сильновып. ф-ий)

введем опер: $Au = u - \alpha J'(u)$ – определен $\forall u$ ($J'(u)\ \exists$)

$\Rightarrow u_{k+1} = Au_k$.

$u_* = \{ Au_* = u_* - \alpha \underbrace{J'(u_*)}_{=0}$

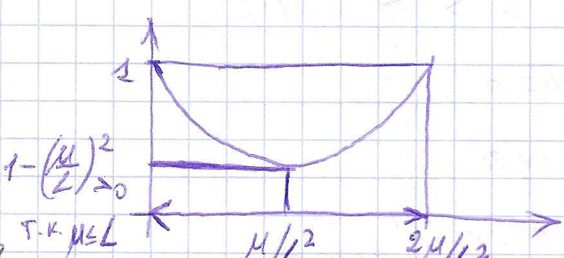
Сейчас д-м, что A – сжимающий оператор

$\|Au - Av\|^2 = \|u - \alpha J'(u) - v + \alpha J'(v)\|^2 =$

$= \|u-v\|^2 - 2\alpha \underbrace{\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle}_{\geq \mu\|u-v\|^2 \text{ т.к. ф-ия сильновып.}} + \alpha^2 \underbrace{\|J'(u) - J'(v)\|^2}_{\leq L^2\|u-v\|^2 \text{ усл. липш.}} \leq$

$\leq \|u-v\|^2 (\underbrace{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}_{\varphi(\alpha)}) \leq \theta^2 \|u-v\|^2$

$0 < \theta < 1$



$\Rightarrow$ сжимание.

$\Rightarrow \|Au - Av\| \leq \theta\|u - v\|$

$\Rightarrow$ сх-ся к своей неподв точке

$+$ неподв. точка!

+ тут неподв. точка, кот. мы ищем

$u_k \xrightarrow{\|\cdot\|} u_*$

$\|u_{k+1} - u_*\| = \|Au_k - Au_*\| \le \theta \|u_k - u_*\| \le \theta^2 \|u_{k-1} - u_*\| \le$

$\overset{\|}{Au_k} \quad \overset{\|}{Au_*}$

$\le \dots \le \theta^{k+1} \|u_0 - u_*\|$; $\theta = q$ — знам. геом. прогр

$\Rightarrow$ метод сх-ся со скор. геом. прогрессии.

если $\alpha = \frac{\mu}{L^2}$ $\Rightarrow$ сам. лучш. (но мы не знаем ни μ ни L..; можем только щупать эмпирич, экспериментально)

$J(u) = \frac{1}{2}\|Au - f\|_F^2$ $\quad A = \mathcal{L}(H \to F)$; $f \in F$.

гильб.

$J'(u) = A^*(Au - f)$; $\quad J''(u) = A^*A$.

$u_{k+1} = u_k - \alpha \underbrace{A^*(Au_k - f)}_{\text{градиент}}$

$\|J'(u) - J'(v)\| = \|A^*A(u - v)\| \le \underbrace{\|A^*A\|}_{L} \|u - v\|$

— усл-е Липшица есть.

Применим 2й критерий сильной выпуклости

$\langle J''(u)h, h\rangle = \langle A^*Ah, h\rangle \ge \mu\|h\|^2$

— это мы должны требовать

квадр форм полож. определен.

$A^*A > 0$ $\Rightarrow$ мин. собств. число $\mu > 0$

L — max собств число

если $H = E^n \Rightarrow L = \max$ с.ч.
$\mu = \min$ с.ч. A^*A

$\Rightarrow$ процесс сх-ся (выбир. парам. α — маленьк.
$\in \left(0, \frac{\mu}{L^2}\right)$

$J'(u) = 2B^T \psi(t, c)$

E^n, L_2^2, W_1^2 — гильб. пр-ва

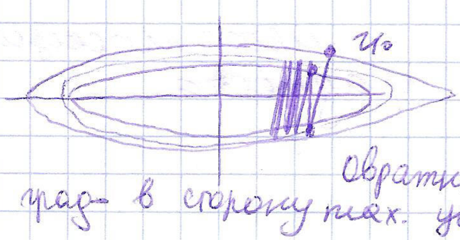
градиент лок. в т. u_k указ. направл. спуска

Достоинства и недостатки градиентного метода.

⊖ 1) Обычно метод сх-ся очень слабо, т.к. обычно q близко к 1
$(0{,}999..)^n$

2. Часто ситуация $\mu \ll L \Rightarrow \mu / L$ — маленьк.
$\Rightarrow q$ близко к 1 $\Rightarrow$ плохая сх-сть

Рассм. $J(u) = \frac{x^2}{10^n} + y^2 = C$ эллипс
$n = 10$

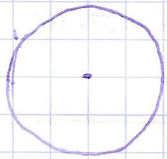


по x, y — разномасштабн. градиента
(по y — большой, по x — оч. маленьк.)
Овражные ф-ии (жестк. система)

град. в сторону max. убывания

сделать зам. перем и эллипс → круг

$\mu = L \Rightarrow q = 0$ за 1 шаг спустимся



2) с точки зрения теории: не знаем μ, L
можем действ. только на ощупь

Метод проекции градиента

{на экз: метод, для какой зад., теор, +/−.}

$J(u) \to \inf$, $u \in U$ − вып. замкн. мн-во из H

$\exists J'(u) \in C^1(U)$

на вып. замкн. мн-во можно проектировать

в таких случ. нельзя град. метод, т.к. можем вылезти за границу U:

$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k))$ − метод проекции градиента.

Будем рассм $\underline{\alpha_k = \alpha}$ $\forall k$

Теорема сх-сти (—//— град. метод.)

Пусть U - вып. замкн. мн-во из H.

$J(u) \in C^1(U)$, $J(u)$ - сильно вып. ~~(⇒ μ‖u-v‖² ≤ ⟨J'(u), ...~~

$(\Rightarrow \mu\|u-v\|^2 \le \langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle)$

+ усл. Липш: $\|J'(u) - J'(v)\| \le L\|u-v\|$

Тогда $\forall u_0 \in U$: $\{u_k\} \longrightarrow u_*$, если $\alpha: 0 < \alpha < \frac{2\mu}{L^2}$

+ верна оценка: $\|u_k - u_*\| \le q^k \|u_0 - u_*\|$,

где $q = \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 L^2}$

Д-во: —//—

введем A: $Au = P_U(u - \alpha J'(u))$

$u_* = Au_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*)) \quad \forall \alpha > 0$

$u_{k+1} = Au_k$

д-м, что A - сжимающий оператор

$\|Au - Av\|^2 = \|P_U(u - \alpha J'(u)) - P_U(v - \alpha J'(v))\| \le$

$\{\|P_U\| \le 1\}$ $\le 1 \cdot \|u - \alpha J'(u) - v + \alpha J'(v)\| =$ —//— $\overset{\text{сил. вып. (пред. теор)}}{—//—} \le q^2 \|u-v\|^2$,

⇒ A - сжимающий оператор

⇒ процесс сх-ся к неподв. точке u_* ← точке минимума ф-ии

Оценка скор-сти сх-сти: —//—

$\|u_k - u_*\|_H \to 0$ ч.т.д.

~~+/–~~

Пр: $J(u) = \frac{1}{2}\|Au - f\|^2_F \to \inf,\ u \in U$; $A \in \mathcal{L}(H \to F)$

– // –

$u_{k+1} = P_U\left(u_k - \alpha\left[A^*(Au - f)\right]\right)$

$u_{k+1} = P_U\left(u_k - \alpha\, \psi(t, l; c_k)\right)$ ← в методе о нагреве стержня.

$U = \{\alpha \le u(t) \le \beta\}$

$$\Rightarrow u_{k+1} = \begin{cases} \alpha, & u_k - \alpha\psi(t,l;c_k) < \alpha \\ \beta, & u_k - \alpha\psi(t,l;c) > \beta \\ u_k - \alpha\psi(t,l;c_k), & \text{иначе} \ -//- \in [\alpha,\beta] \end{cases}, \quad c_k = Au_k - f$$

Уметь вычисл. метода для разн. задач (интегр., функциональн., конечномерных задач)

Пр: $J(u) = x^2 + xy + y^2$, $(x,y) \in$ параллелип.

– сильновыпукл.
$\exists$ конст. мин.

($x^2 + 2xy + y^2$ – проблема)

(+/–) те же самые:

(+) схема удобн., красив., простая, естеств.

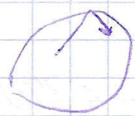
(–) – // –

3). надо проектир. на кажд. шаге (зад. минимума)

⇒ этот метод несколько хуже (когда тут U может H)

$J'(u)\ \exists$ и
методы первого порядка: в методе нужно только знание о градиенте $J'(u)$ (град. проекц) +

1) $\exists$ еще метод возможных направлений (использ. градиент хитрым образом



(если антиград ведет не туда, проектир тяжело)

2) метод условн. градиента

$u_{k+1} = u_k - \alpha \underline{p_k} \longleftarrow$ направление

3) метод сопряж. градиентов

— // —

Это всё при условии, что $J(u) \in C^2(U)$.

Метод Ньютона

1) $J(u) \to \inf$, $u \in U$ — вып. замкн. мн-во у H
(напр., $U = H$)

$J(u) \in C^2(U)$.

Эпиграф: Это почти неподвижности муха
м. Ньют
Мчатся куда-то со скоростью звука
Зная прекрасно, что есть уже где-то
сх-сть м. Ньют
Некто, летящий со скоростью света

 Леонид Мартынов.

Пусть u_k - известно.

$$J(u) \overset{\text{Тейлор}}{=} J(u_k) + \langle J'(u_k), u-u_k\rangle_H + \frac{1}{2}\langle \overset{\text{оператор}: H\to H}{\overbrace{J''(u_k)}}(u-u_k), u-u_k\rangle_H + \cancel{\bar{o}(\|u-u_k\|^2)}$$

Рассм. только главную квадратичн. часть.

(2) $J_k(u) = J(u_k) + \langle J'(u_k), u-u_k\rangle_H + \frac{1}{2}\langle J''(u_k)(u-u_k), u-u_k\rangle_H$.

(3) Рассм. задачу $J_k(u) \longrightarrow \inf,\ u \in U \Rightarrow u_{k+1}$

u_{k+1} - т. минимума вспомогат. зад., т.е.

$J_k(u_{k+1}) = \min\limits_U J_k(u)$ — <u>метод Ньютона</u>

<u>Рассм. $U = H$.</u>

Этот метод: ~~$J'(u) = 0$~~

найти u: $J'(u) = 0 \Rightarrow$ т. минимума

$J_k'(u_{k+1}) = 0.$ $\underset{(2)}{J_k'(u) =} J'(u_k) + J''(u_k)(u-u_k)$

$\underline{J_k'(u_{k+1}) = J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k)} = 0$

$\Rightarrow J''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = -J'(u_k)$

Пусть $\exists\ J''^{-1}$

$u_{k+1} - u_k = -(J''(u_k))^{-1} \cdot J'(u_k)$

$\boxed{u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} \cdot J'(u_k)}$ — м. Ньютона

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ — было

$J(x) = f'(x) = 0$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)} =$

у нас получ. то же самое (это мы минимизир $f(x)$ ищем точку, в кот. ф-ия $=0$)

$= x_k - (f''(x_k))^{-1} f'(x_k)$

Д-м сх-сть.

будет q^{2^k}. квадр. скор. сх-сти

22.11.2006

(1) $J(u) \to \inf$, $u \in U$, $J(u) \in C^2(U)$

(2) u_k - изв. $J_k(u) = \langle J'(u_k), u-u_k \rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u_k)(u-u_k), u-u_k \rangle \to \inf\limits_{u \in U}$

$\Rightarrow u_{k+1}$

u_{k+1} может $\nexists$, их м.б. много (неоднознач.) — эти проблемы мы сейчас не обсуждаем.

Теорема: Пусть U - выпукло, замкнуто, $\subseteq H$ (в частн., $U=H$ м.б.), $\operatorname{int} U \neq \emptyset$. (для критерия сильн. вып (см. ниже))

$J(u)$ - сильновыпукл. (старш.) во всех мет.

$J(u) \in C^2(U)$, и 2я произв. удовл. усл. Липшица.

$\forall u, v \in U$

(3) $\|J''(u) - J''(v)\| \leq L \|u-v\|$, $L = const$ (ухи оценка 3ю произв.)

97

4) Пусть нач. приближение таково, что $\|u_0 - u_*\| < \frac{2\mu}{L}$

L - конст. Липш., μ - ку сильн. вып.:

$\langle J''(u) h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$

$\Rightarrow$ метод 2 порядк. послед $\{u_k\}$: $\|u_k - u_*\| \leq \frac{2\mu}{L} q^{2^k}$,

5) $q = L \frac{\|u_0 - u_*\|}{2\mu} < 1$

Д-во: $\exists!\, u_*$ (следствие теор. Вейерштр., т.к. ф-ия сильновып.)

если u_k - сущ $\Rightarrow\, !\, u_{k+1}$ (т.к. J_k - сильно вып.:

$J_k'(u) = J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k)$, $J_k''(u) = J''(u_k)$

$\langle J_k''(u) h, h \rangle = \langle J''(u_k) h, h \rangle \geq \mu \|h\|^2$

$\Rightarrow$ {2й критерий сильн. вып.} $\Rightarrow J_k(u)$ - сильновып)

$J_k(u_{k+1}) = \min\limits_{u \in U} J_k(u) \Leftrightarrow \langle J_k'(u_{k+1}), u - u_{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$

критерий оптимальности

подставим:

$\langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u - u_{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$

$u_* \Leftrightarrow \langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U$

подставим в верхн. нер-во $u = u^*$

в нижн. $u = u_{k+1}$

(+) $\langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u^* - u_{k+1} \rangle \geq 0$

$\langle J'(u_*), u_{k+1} - u_* \rangle \geq 0$

$$0 \le \langle J'(u_*) - J'(u_k) - J''(u_k)(u_{k+1} \overset{\pm u_*}{} - u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle J'(u_*) - J'(u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle}_{\int_0^1 \langle J''(u_k + t(u_* - u_k))(u_* - u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle dt} - \overbrace{\langle J''(u_k)(u_{k+1} - u_*),\ u_{k+1} - u_* \rangle}^{\ge \mu \|u_{k+1} - u_*\|^2} - \langle J''(u_k)(u_* - u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle$$

{ ф-ла конечн. приращ.: $\langle J'(u+h) - J'(u), z \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, z \rangle dt$ }

$$\mu \|u_{k+1} - u_*\|^2 \le \int_0^1 \langle [\underbrace{J''(u_k + t(u_* - u_k)) - J''(u_k)}_{\text{усл. Липш.}}](u_* - u_k),\ u_{k+1} - u_* \rangle dt \le$$

$$\le L \int_0^1 t \|u_* - u_k\|^2 \cancel{\|u_{k+1} - u_*\|}\, dt$$

$$\mu \|u_{k+1} - u_*\| \le L \|u_k - u_*\|^2 \underbrace{\int_0^1 t\, dt}_{1/2}$$

(6) $\|u_{k+1} - u_*\| \le \frac{L}{2\mu} \|u_k - u_*\|^2 \quad \forall k = 0, 1, \dots$

$k=0$: $\|u_0 - u_*\| \le \frac{2\mu}{L} \underbrace{q^{2^0}}_{=q}$ – верно $\Rightarrow$ нер-во при $k=0$ верно.

$k \ge 1$: $\|u_k - u_*\| \le \frac{2\mu}{L} q^{2^k}$ – пусть верно

$\overset{(6)}{\Rightarrow} \|u_{k+1} - u_*\| \le \frac{L}{2\mu} \left(\frac{2\mu}{L} q^{2^k} \right)^2 = \frac{2\mu}{L} q^{2^k} \cdot q^{2^k} = \frac{2\mu}{L} q^{2^{k+1}}$

ч.т.д.

«скорость света»

+/- метода:

⊕: 1) высок. скор. сх-сти

⊖ 2) на кажд. шаге решать зад. минимизации

Но Если же $U = H = E$

$$u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k)$$ реш-е $J'(u) = 0$

* $J''(u_k)$

$$\underbrace{J''(u_k)}_{\text{матр.}} \underbrace{(u_{k+1} - u_k)}_{\text{вектор } \Delta u} = \underbrace{-J'(u_k)}_{\text{вектор}} \quad \text{— СЛАУ}$$

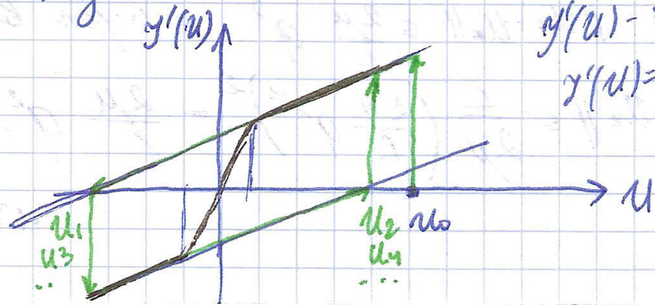
⇒ м. Ньютона для хорош. случая (а только тогда и надо его применять) ⇒ ⊕ решать умеем

⊖ 1) на кажд. шаге надо решать зад. квадратичн. минимизации (на многогранном мн-ве)

2) $\|u_0 - u_*\| < \frac{2\mu}{L}$ маленьк. / ← большое — хорош. выбор нач. приближ.!

u_0 д.б. близко к u_*

Пример:



$J'(u)$ - черным

$J'(u) = 0$ - нулевая точка!

$J''(u_k) \geq \mu > 0 \Rightarrow J''(u_k) h^2 \geq \mu h^2$ ⇒ сильновыпукл. ф-ия (см. график) — критерий к выбору нач. приближ.

⇒ на практике: берут плохой метод (градиентный) и медленно попадаем в хорош. окр-сть мет. Ньютона — далее м. Н.

Квазиньютоновские методы

$u_{k+1} = u_k - (\underbrace{J''(u_k)})^{-1} J'(u_k)$.

кажд. раз обращать матр. — плохо!!!

Заменить этот обр. оператор каким-л. другим?

т.е. $u_{k+1} = u_k - A_k J'(u_k)$: а) A_k — просто вычисл.

и б) $\| A_k - (J''(u_k))^{-1} \| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

если нет производн?

Метод покоординатного спуска

1 произв. (или 2)

„Коль нет цветов среди зимы,
так и грустить о них не надо"
Есенин.

(1) $J(u) = J(u^1, u^2, \dots, u^n) \to \inf$, $u \in E^n$. Нет никаких производных.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис.

Вдоль каждой оси перебирать зн-ия ф-ций и искать те направл., по кот. будет уменьш. зн-ие ф-ций.

Пусть известно u_k — n-мерн. точка и α_k — параметр. маленьк. шажок

$\boxed{J(u_k + \alpha_k e_1) < J(u_k)} \xrightarrow{да} u_{k1} = u_k + \alpha_k e_1$

$\downarrow$ нет

$\boxed{J(u_k - \alpha_k e_1) < J(u_k)} \xrightarrow{да} u_{k1} = u_k - \alpha_k e_1$

$\downarrow$ нет $\quad u_{k1} = u_k$

$\boxed{J(u_{k1} + \alpha_k e_2) < J(u_{k1})} \xrightarrow{да} u_{k2} = u_{k1} + \alpha_k e_2$

$\downarrow$ нет

$\boxed{J(u_{k1} - \alpha_k e_2) < J(u_{k1})} \xrightarrow{да} u_{k2} = u_{k1} - \alpha_k e_2$

$\downarrow$ нет $\quad u_{k2} = u_{k1}$

цикл удачный, если где-то произошло строгое убывание

u_{kn}: $\boxed{J(u_{kn}) < J(u_k)} \xRightarrow{да} u_{k+1} = u_{kn}$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$

$\downarrow$ нет

если $J(u_{kn}) = J(u_k) \xRightarrow{да} u_{k+1} = u_k$, $\alpha_{k+1} = \lambda \alpha_k \quad 0 < \lambda < 1$.

метод предлож. Жданов — студент Васильева увлекся шахмат. прогр.

② неудачн. цикл: $J(u_k \pm \alpha_k e_i) \geq J(u_k) \quad \forall i = \overline{1,n})$

<u>Теорема</u>:

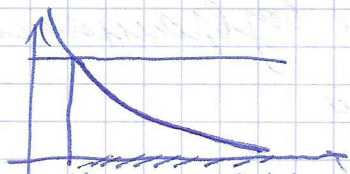
$J(u) \in C^1(E^n)$, выпуклая.

мн-во Лебега $M(u_0) = \{u \in E^n : J(u) \leq J(u_0)\}$
– ограничено.

Тогда $\{u_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$; $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0$

т.е. метод сх-ся и по ф-ии, и аргументу

Пр:



$M(u_0)$ – неогранич.!

<u>Д-во</u>:

1) $U_* \neq \varnothing$, т.к. $U_* \in M(u_0)$ – огранич.
$\Rightarrow J(u)$ – непрер. на $M(u_0)$
$\Rightarrow$ {т. Вейерштр} $\Rightarrow$ достиг. inf.

$J(u_0) \geq J(u_1) \geq \ldots \geq J(u_k) \geq \ldots$ $\downarrow$ $J(u_k) \geq J_*$

послед. убыв, огр. снизу $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq J_*$.

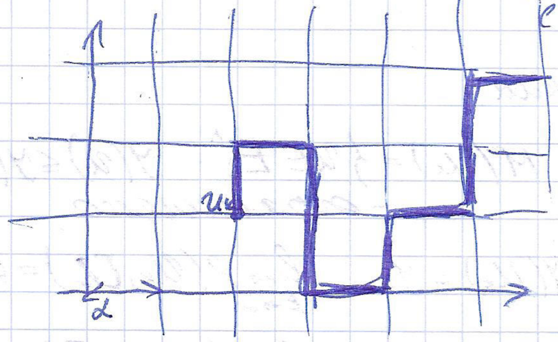
Д-м, что $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$.

Д-м, что число неудачных циклов ∞ много
(дробление α_k)

Д-во: от противного.

Пусть $\alpha_k = \alpha \ \forall k \geq k_0$ (не дробится, начиная с некот. номера)

$\Rightarrow$



будем вечно гулять, не возвращаясь ни разу в исходную точку

мн-во Лебега огранич. $M(u_0)$, $u_k \in M(u_0) \ \forall k$

$\Rightarrow$ в конце концов переберем все точки

$\Rightarrow$ придет время неудачи. - остановимся

$\Rightarrow$ надо дробить $\rightarrow$ противореч. (что не дробится)

α_{k_1} - 1ая неудачн. цикл

α_{k_2}

. . . . .

α_{k_l}

$\alpha_{k_l} \to 0$ (дробление)

на кажд. неудачн. цикле $J(u_{k_l} \pm \alpha_{k_l} e_i) \geq J(u_{k_l}) \ \forall i = \overline{1,n}$

$$J(u_{k\ell} \pm \alpha_{k\ell} e_i) - J(u_{k\ell}) \overset{\text{произв}}{\underset{\exists}{=}} \frac{\partial J(u_{k\ell} \pm \theta_i \alpha_{k\ell} e_i)}{\partial u^i} (\pm \alpha_{k\ell} e_i) \geq 0$$

$$\frac{\partial J(u_{k\ell} \pm \theta_i \alpha_{k\ell} e_i}{\partial u_i} \begin{matrix} \geq 0 & \alpha_{k\ell} > 0 \\ \leq 0 & \alpha_{k\ell} < 0 \end{matrix}$$ делим на "+" и "−"

$$\Rightarrow \frac{\partial J(u_{k\ell} \pm \theta_i \alpha_{k\ell}) e_i}{\partial u_i} = 0 \qquad \forall i = \overline{1,n}$$

$\{u_k\} \in M(u_0)$

$\Rightarrow$ по т. Больц.-Вейерштр.

$\Rightarrow \exists\, u_{k\ell_s} \xrightarrow{\text{подпосл.}} u_*$

$$\frac{\partial J(u_{k\ell_s} \pm \theta_i \alpha_{k\ell_s}) e_i}{\partial u_i} = 0 \xrightarrow[s \to \infty]{} \frac{\partial J(u_*)}{\partial u_i} = 0$$

$\forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow J'(u_*) = 0$

т.к. ф-ия $J(u)$ выпукла $\Rightarrow u_* \in U_*$

$\lim J(u_{k\ell_s}) = J_*$, $\exists \lim J(u_k) \geq J_*$, послед $\downarrow$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$$

ч.т.д.

+/− $\oplus$ метод оч. прост, не требует никаких знаний производных

$\ominus$ плохо сх-ся. (может вообще не сх-ся).

29.11.2006.

1) д-м, что в методе покоорд. спуска без произв. нельзя.

Пр:

$J(u) = x^2+y^2-2(x+y)+2|x-y|$

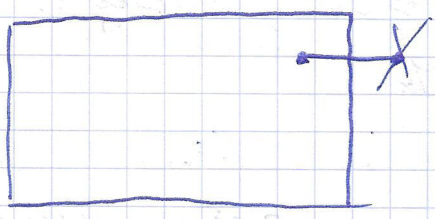
$u_* = (0,0)$.

если возьмем нач. приближ. далеко ⇒ зациклимся.

не гладкий ⇒ из точки не выйдем.

2) Реализ. метод на прямоугольнике

схема —//— , но сист. шаг неудачн., если точка вылезла за пределы параллелепипеда.



3) параметр. α можно из усл. скор. спуска

⇒ получ. метод Зейделя. $J(u)=\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle - \langle b,u\rangle$

(т.к. в мет. Зейд. уточн. не весь вектор, а отдельн. координаты) метод коорд. спуска: когда вообще ничего нет, ни производ. и ничего не знаем $\Rightarrow$ с помощью него можно хоть чуть-чуть улучшить ситуацию.

u_*

Мы в город Изумрудный идем дорогой трудной, штрафы
идем дорогой трудной,
дорогой не прямой

Метод штрафных функций

(1) $J(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U$

Мы будем расcм. $U = \{ u \in U_0 : g_i(u) \le 0, \; i = \overline{1,m}$ — замкн. ф-ии

(2) $\qquad g_i(u) = 0, \; i = \overline{m+1,s} \}$

где $g_i(u)$ определена на U_0

U_0 – "простое" мн-во (шар, параллелепипед, гипероктаэдр) {где легко можно вычисл. min расстояние и т.д.} вып. пр-во

штрафы помогут нам избавиться от ограничений g_i, испортим $J(u)$ и будем работ. на мн-ве U_0.

Опр: Ф-ии $\{P_k(u)\}$ наз. штрафной ф-ией {послед. ф-ией} мн-ва U на мн-ве U_0, если

$$\lim_{k\to\infty} P_k(u) = \begin{cases} 0, & \forall u\in U \\ +\infty, & \forall u \in U_0 \setminus U \end{cases}$$

наруш. хотя бы одно ограничение

Пример:

$$P_k(u) = A_k \underbrace{\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(u), 0\}}_{\text{штраф для огранич. типа нер-в}} + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(u)|\Big]}_{P(u)}$$

$u\in U_0$
$A_k > 0$
$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = +\infty$

не наруш $\Rightarrow$ 1я сумма 0
2я сумма 0

наруш $g_i > 0$

можно

$$P_k(u) \overset{(3)}{=} A_k \Big[\overbrace{\sum_{i=1}^{m} \big(\underbrace{\max\{g_i(u), 0\}}_{g_i^+(u)}\big)^{p_i} + \sum_{i=m+1}^{s} \underbrace{|g_i(u)|}_{g_i^+}{}^{p_i}}^{P(u)}\Big] =$$

$\Rightarrow$ (срез огранич. на гладк.)

$\Rightarrow$ это пример с гладким штрафом

$$= A_k \cdot \sum_{i=1}^{s} \big(g_i^+(u)\big)^{p_i}$$

$u\in U_0$
$A_k \to +\infty$.

Пр 2:

$P_ж$

$$P_k(u) = \frac{1}{A_k}\left(\sum_{i=1}^{m} e^{A_k g_i(u)} + \sum_{i=m+1}^{s} e^{A_k g_i^2(u)}\right) \qquad A_k \to +\infty$$

не нарушено огранич $\Rightarrow P_k(u) > 0$, но оч. маленький.

Но эта ф-ия гладкая так же, как $g_i(u)$
(нет огранич. на гладк. g_i)
а в ф-ии (3) есть огранич. на гладкость.

Метод:

Образуем ф-ию $\Phi_k(u) = J(u) + p_k(u) = J(u) + \overset{\text{в случае (3)}}{A_k \cdot P(u)} \to \inf\limits_{u \in U_0}$, $k = 1, 2, \ldots$

(4)

минимизир. др. ф-ию, но на хорош. мн-ве ~~мн-ве~~ ("чуть" плохая ф-ия, т.е. хуже, но не такая плохая ф-ия)

получ. серию задач. ($\forall k$)

Р. Курант {применил схему ~~Реш~~}

применил метод штрафов к своей задачи в 1943г. (потом при развитии выч. техники догадались до этого)

смысл. $J(u) + \underbrace{A_k \cdot P(u)}_{\text{оч. больш. ф-ия}}$

min там, где величина мала, т.е. $J(u)$, т.е. близко к нашим условиям

$\Rightarrow$ будем искать min там, где велич. $A_k P(u)$ не огромная — то, что надо.

зад. (4) можно решать приближенно

ищем $u_k \in U_0$: $\Phi_k(u_0) \le \underbrace{\inf_{U_0} \Phi_k(u)}_{> -\infty} + \varepsilon_k$, $\varepsilon_k > 0$

(5) $\varepsilon_k \to 0$

в (4,5) мы не задаёмся, как будем решать эту задачу — $\forall$ способом (нужна гладкость, как в этом методе реш-ия)

Бывает так, что min — там, где огромн добавка. — $\exists$ контрпример

Пример 1:

$J(u) = x^2 + xy + y^2 \qquad U = \{u(x,y) : x+y-2=0\}$, $u \in E^2 = U_0$

$\Phi_k(u) = x^2 + xy + y^2 + \underset{A_k}{\overset{\shortparallel}{k}}(x+y-2)^2 \longrightarrow \inf_{u \in E^2}$

хорош. зад., все выпукло -//-

$\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y} = 0$

легко решается

получ: $(x_k, y_k) = \left(\dfrac{4k}{3+4k} ; \dfrac{4k}{3+4k}\right)$

$\varepsilon_k = 0 \qquad \downarrow^{k\to\infty}_{1} \qquad \downarrow^{k\to\infty}_{1}$

$u_* = (1,1)$

$J_k = 3$

штраф все уловил — оч. хороший пример.

Пример 2: (плохой пример)

$J(u) = e^{-u} \to \inf, \quad \overset{\text{"}U_0\text{"}}{U = \{u \in E^1,\ g(u) = u e^{-u} = 0\}} = \{0\}$

выбора нет, всё однозначно

$U_* = \{0\}, \ J_* = 1.$

теперь применим штраф. (3)

$\Phi_k(u) = e^{-u} + k g^2(u) = e^{-u} + k u^2 e^{-2u} \to \inf, u \in E^1$

inf не достиг

$\Phi_k(u) \longrightarrow 0$

0 достиг. бы только при $u = +\infty$

$\inf\limits_{E^1} \Phi_k(u) = 0 \quad \forall k.$

Теперь рассм. (5) : $u_k = k$ удовл. (5) ~~при $\varepsilon_k =$~~

при $\varepsilon_k = \Phi(u_k) = e^{-k} + k^3 e^{-2k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\Phi_k(u_k) = 0 + \varepsilon_k = \Phi(u_k)$

но $u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty$

$J(u_k) = e^{-k} \longrightarrow 0 < J_*$

в этом примере штраф тоже плохой Φ_k

(мала вдалеке от хороших точек)

аргумент $\to \infty$

если уберем паразитн. множ. $g(u) = u$ станет $\Rightarrow$ будет уже хорошо.

111

т.е. от постановки задачи много чего зависит.

<u>Теорема 1</u>: Пусть $J(u)$, $g_i(u)$ $i=\overline{1,s}$ определены, ~~конеч~~в конечны на мн-ве U_0. ; $\inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty$

Тогда метод штрафов (3), (5) порожд. $\{u_k\}$, кот. облад. св-вами:

(6) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, J(u_k) \le \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \Phi_k(u_k) \le J_*$

<u>Д-во</u>: $J(u_k) \le J(u_k) + \underbrace{A_k}_{>0}\underbrace{P(u_k)}_{\ge 0} = \Phi_k(u_k) \overset{(3)}{\le} \inf\limits_{U_0}\Phi_k(u)+\varepsilon_k \le$

$\le \Phi_k(u)+\varepsilon_k = J(u)+A_kP(u)+\varepsilon_k \quad \forall u\in U_0$

$k=1,2,\dots$

в частности, верно

$\forall u \in U \overset{\text{там}}{\Rightarrow} P(u)=0$

$\Rightarrow J(u_k)\le \Phi_k(u_k) \le J(u)+\varepsilon_k \quad \forall u\in U$

$J(u_k) \le \Phi_k(u_k) \le J_* + \varepsilon_k. \quad \forall k=1,2,\dots$

перех. к верхн. пределу $\Rightarrow$ ч.т.д.

<u>Теорема 2</u>:

Пусть $J(u)$, $g_i(u)$ — определены и конечна на U_0

$J_{**} = \inf\limits_{U_0} J(u) > -\infty$

То выполнено (6) и $\lim\limits_{k\to\infty} g_i^+(u_k) = 0$

$i=\overline{1,m}$

т.е. $\begin{cases} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_i(u_k)\le 0 \\ \lim g_i(u_k)=0 \quad i=\overline{m+1,s} \end{cases}$ т.е. получ. предельн. выполн. штрафн. ф-ции

$J_* \geq J_{**} > -\infty$

$\Phi_k(u) \geq J(u) \geq J_{**} \quad \forall u \in U_0$

$\Rightarrow \inf \Phi_k(u) \geq J_{**} > -\infty$

$\Rightarrow J_* \geq J_{**} > -\infty$, т. е. выполн. усл. теор. 1

$\Rightarrow$ (6).

Д-м 2ю часть теор. 2.

$0 \leq A_k P(u_k) \leq \underbrace{\Phi_k(u_k)}_{\substack{\leq Const \\ \text{т.к. } \lim \Phi_k \leq J_*}} - J(u_k) \leq Const - J_{**} = const \stackrel{\text{def}}{=} C_0$

$\forall k : A_k P(u_k) \leq C_0$

$\Rightarrow 0 \leq P(u_k) \leq \frac{C_0}{A_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow P(u_k) \to 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} \left(g_i^+(u_k)\right)^{p_i} \to 0$

$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} g_i^+(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ч.т.д.

<u>Теорема 3</u> :

U_0 - сл. замкн. в H (все слабопредельные точки остаются в мн-ве),

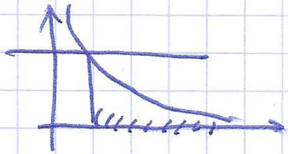
$J(u)$; $\underset{i=\overline{1,s}}{g_i^+(u)}$ - слабо полунепрерывны снизу на U_0, $J_{**} > -\infty$

$U(\delta) = \{u \in U_0 : g_i^+(u) \leq \delta, \ i=\overline{1,s}\} =$ слабокомпактны при $\delta > 0$

$= \{u \in U_0 : \quad g_i(u) \leq \delta, i = \overline{1,m} \ ; \ |g_i(u)| \leq \delta, \ i=\overline{m+1,s}\}$

все те огранич. с точн. до δ

пример 2 не подх



слабокомп. предполаг. огранич.

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_{**}$ и ~~$\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0$~~

и $\{u_k\} \xrightarrow{сл.} u_*$

из (5).

Д-во: $\Phi_k(u) \ge J(u) \ge J_{**}$ $\forall u \in U_0$

$\Rightarrow \inf\limits_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty \Rightarrow$ метод (5) порожд. послед $\{u_k\}$

Из теор. 1,2 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} g_i^+(u_k) = 0$

$\Leftrightarrow \overline{\lim}\, g_i(u_k) \le 0$ $\quad i = \overline{1,m}$

$\lim g_i(u_k) = 0$ $\quad i = \overline{m+1,s}$

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow g_i(u_k) \le \delta \quad \forall k \ge k_0 & i = \overline{1,m} \\ |g_i(u_k)| \le \delta & i = \overline{m+1,s} \end{array}\right\} \in U_\delta \text{ - сл. комп}$$

$\Rightarrow \exists$ подпосл $\{u_{k_l}\} \xrightarrow{сл\ вн} u_*$

$$1)\ \left.\begin{array}{l} u_* \in U_0 \\ g_i(u_0) \le 0 \\ g_i(u_0) = 0 \\ u_0 \text{ - т. min} \end{array}\right\} \text{д-ть}$$

6.12.2006.

$\{u_{k_l}\} \xrightarrow{\text{сл. вн}} u_*$.

будем экзаменовать эту послед.

1) $u_* \in V_0$, т.к. V_0 - слабзамкн.,

$\{u_{k_l}\} \in V_0 \implies \lim u_{k_l} \in V_0$

2) $\lim\limits_{l\to\infty} g_i^+(u_{k_l}) = 0$

т.к. g_i - слабополунепр. снизу

$g_i(u_*) \le \underline{\lim}\, g_i(u_{k_l}) \le \lim g_i(u_{k_l}) = 0$ $\forall i = \overline{1,m}$

$\Rightarrow g_i(u_*) \le 0$

$\lim\limits_{l\to\infty} |g_i(u_{k_l})| = 0$

$|g_i(u)|$ - слабополунепр. снизу

$\Rightarrow |g_i(u_*)| \le \underline{\lim}\, |g_i(u_{k_l})| \le \overline{\lim}\, |g_i(u_{k_l})| = 0$

$\Rightarrow g_i(u_*) = 0$ $\forall i = \overline{m+1,s}$

$\Rightarrow u_* \in U$ (по определению)

д-м, что $u_* \in U_*$

$\underset{\text{нижн. грань}}{J_*} \le \underset{\text{зн-ие в точке}}{J(\overset{\in U}{u_*})} \overset{J\text{-сл. полун. снизу}}{\le} \underline{\lim}\, J(u_{k_l}) \le \overline{\lim\limits_{l\to\infty}}\, J(u_{k_l}) \overset{\text{теор. 1}}{\le} J_*$

$\Rightarrow J(u_*) = J_* = \lim\limits_{l\to\infty} J(u_{k_l})$.

u_{k_l} - какая-то слабая предельн. точка ; $\forall u_{k_l} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$.

$\Rightarrow \{u_k\} \xrightarrow{\text{сл. вн.}} u_*$.

ч.т.д.

в E^n теор. гораздо проще (м. ск-сть $\Leftrightarrow$ ск-сти и т.р.)

↗ следствие из т.3

Теорема 4: Пусть U_0 - замкн. мн-во из E^n; $J(u), g_i^+(u)$, $i=\overline{1,s}$ - полунепр. снизу.

$J_{**} = \inf\limits_{U_0} J(u) > -\infty$

$U(\delta) = \{u \in U_0 : g_i^+(u) \le \delta,\ i=\overline{1,s}\}$ - ограничено при некотором $\delta > 0$

(замкнутость $U(\delta)$ в силу полунепрерывн. снизу g_i^+)

$\Rightarrow U(\delta)$ - компактно.

$\{A_k\} \to +\infty$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$ $\Rightarrow \{u_k\} \xrightarrow{U_*}$ из метода штрафн. ф-ции

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$$

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0$$

без д-ва, т.к. следствие.

⊕ гибкая схема: что хотим, то штрафуем, U_0 - простое

$\Phi_k(u) \to \inf$, $u \in U_0$ — $\forall$ методом!, главное, чтобы

$\Phi(u_k) \le \inf\limits_{U_0} \Phi(u) + \varepsilon_k$.

⊖ $\exists$ примеры, где м. штрафов не ск-ся $\Rightarrow$ надо аккуратно.

$A_k \to +\infty$ может быть плохо.

Пр: $J(u) = x^2 + y^2 \to \inf$; $U = \{x \le 0\}$

методом штрафов: для гладкости возвели в квадрат

$$x^2 + y^2 + A_k\left(\max(x, 0)\right)^2 \longrightarrow \inf, \ u \in E^2$$

малые изменения x могут привести к большим изменениям ф-ии.

т.е. метод штрафн. ф-ий имеет огранич. применение из-за своей овражности => на практике м. штрафов примен. на первых шагах, чтобы получ. хорошее нач. приближений; потом можно переходить к др. методу.

Правило множителей Лагранжа.

Знание некоторых принципов
легко возмещает незнание
некоторых фактов.

Гельвеций (философ)

Будем рассм. зад. минимизации:

(1) $J(u) \to \inf, \ u \in U$

(2) $U = \{u \in U_0, \ \underset{i=\overline{1,m}}{g_i(u) \le 0}, \ \underset{i=\overline{m+1,s}}{g_i(u) = 0}\}$.

(см. теор. невып. ф-ий – было огранич. на рав-во обобщ. до нер-ва.)

$\mathcal{L}(u, \bar\lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u)$, $\quad u \in U_0$

s+1-мерн. вектор.

$\bar\lambda \in \tilde\Lambda_0 = \{\bar\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) : \lambda_0 \ge 0; \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0\}$

Теорема (принцип Лагранжа):

{д-м только в n-мерн. пр-ве}

Пусть U_0 – выпукл, замкн. мн-во из E^n.

$J(u), g_i(u) \in C^1(U_0)$, $J_* > -\infty$, u_* – точка локального минимума, т.е.

$J(u_*) \le J(u) \quad \forall u \in U_0 \cap \{|u - u_*| \le \delta\}$, $\delta > 0$

Тогда необходимо $\exists \bar\lambda^* \ne 0$, $\bar\lambda^* \in \tilde\Lambda_0$ (3),

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \lambda^*)}{\partial u}, u - u_* \right\rangle \geq 0 \quad \underline{\underline{(4)}} \quad \forall u \in U_0$$

~~{был критерий оптим. $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \ \forall u \in U$~~

$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0 \quad i = \overline{1, m}$ (условие дополняющей ~~[illegible]~~ нежесткости)

$\underline{\underline{(5)}}$

не понятно почему так называется.

<u>комментарий</u>

критерий оптим., когда ф-ия выпукл: $\langle J'(u_*); u - u_* \rangle \geq 0$
$\forall u \in U$

если g_i - выпукл. и $s = m$
если $J(u)$ - выпукл. $\Big\} \Rightarrow \mathcal{L}(u, \lambda)$ - выпукл.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u_*, \lambda^*) = \inf_{U_0} \mathcal{L}(u, \lambda^*)$$

если $U_0 = E^n \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \lambda^*)}{\partial u} = 0$

Лагранж так и думал: вместо ограничений написать ф-ию Лагранжа и её минимизировать.

Из письма Лагранжу Эйлера
2 дек 1759 г. (Лагранжу 23 года)

твоё аналитич. реш-е изопериметрич. проблемы содерж. все, что только можно желать в этой области ...

Эйлер - оч. благородн. чел-к.

119

тут число ур-ий = числу неизв.

неизв: $\underset{n\text{ шт}}{u}$, $\underset{s+1\text{ шт}}{\bar{\lambda}}$

пусть $U_0 \equiv E^n \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar{\lambda}^*)}{\partial u} = 0 & n \text{ ур-ий} \\ \lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i=\overline{1,m} & m \text{ ур-ий} \\ g_i(u_*) = 0, \quad i=\overline{m+1,s} & s-m \text{ ур-ий} \\ \text{усл. (B):} \\ \bar{\lambda}^* \text{ удовл. теореме} \Rightarrow \alpha\bar{\lambda}^* \ \forall \alpha > 0 \text{ тоже удовл. той же теореме} \\ \Rightarrow \text{можем провести нормировку} \\ \Rightarrow |\bar{\lambda}^*| = 1 & 1 \text{ ур-е} \end{cases}$$

$\left.\right\}$ s шт

$\Rightarrow m+s+1$ ур-е.

На базе принц. Лагранжа можно сотворить итерац. процессы.

Теперь д-м принцип Лагранжа.

Д-во: (будем д-ть, опираясь на метод штрафов, ∃ много разных д-в).

сузим мн-во U_0

1) рассм. мн-во $W_0 = U_0 \cap \{|u-u_*| \le \delta\}$, $\delta > 0$

W_0 – ограниченное мн-во (кусок шара).

$$g_0(u) = J(u) + |u-u_*|^2 \to \inf, \quad W = \{u \in W_0 : \; g_i(u) \le 0 \;\; i=\overline{1,m}; \;\; g_i(u) = 0, \;\; i = \overline{m+1,s}\}$$
(6)

Эта зад. хороша тем, что т. минимума – ! и равна u_*:

$g_0(u) > J(u) \ge J_* \quad \forall u \in W_0, \; u \ne u_*$

$g_0(u_*) = J(u_*) = J_*$, J_* – зн-ие локальн. минимума.

Оштрафуем задачу (6)

Введем штраф $\Phi_k(u) = g_0(u) + A_k \sum\limits_{i=1}^{s} (g_i^+(u))^2 \to \inf\limits_{u \in W_0}$

W_0 – огранич., замкн. (по усл. U_0 – замкн.) ⇒ компактное мн-во.

$\Phi_k(u)$ – непрер.

по т. Вейерштрасса: $\exists u_k \in W_0 : \Phi_k(u_k) = \inf\limits_{W_0} \Phi_k(u)$ (7)

Выполнены все усл-я теор.(4) ⇒ м. штрафов сх-ся

(… U_δ – огранич. $\forall \delta$)

121

в силу т. 4 ↓

$$\lim_{k\to\infty} g_0(u_0) = g_{0*} = J(u_*)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} J(u_k) = \overset{\text{лок. min}}{J_*}\text{, т.к. } W_* = \{u_*\}$$ (зад. (6) имеет ! реш-е)

$$\lim_{k\to\infty} |u_k - u_*| = 0$$

Покажем, что для u_* выполн. усл-ие, кот. хотим д-ть в теореме.

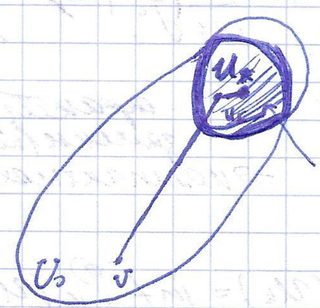
u_* — т. лок. min $\Rightarrow$ выполн. ~~критерий~~ необх. усл. оптимальн.

$$\Rightarrow \langle \Phi_k'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in W_0 \qquad (8')$$

необх. условие задачи (7)

тут используется условие выпуклости U_0

Д-м, что можно писать $\langle \Phi_k'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ $\forall u \in U_0$ (8)



$\forall v \in U_0$

$u_k \to u_*$

$\Rightarrow \forall k \geq k_0 \quad u_k \in W_0$

отрезок $v u_k \in U_0$, т.к. выпуклость

$$v_k = u_k + \alpha_k (v - u_k), \quad \alpha_k \in [0, 1]$$

$$|v_k - u_*| \leq |v_k - u_k| + |u_k - u_*| = \underset{\downarrow 0}{\alpha_k} \underbrace{|v - u_k|}_{\leq \delta/2} + \underbrace{|u_k - u_*|}_{\leq \frac{\delta}{2} \text{ т.к. } u_k \to u_*} \leq \delta$$

$\Rightarrow$ (8) верно:

$$\langle \Phi_k'(u_k), \underbrace{v_k - u_k}_{\underbrace{\alpha_k}_{\geq 0,\ \text{маленьк}}(v-u_k)} \rangle \geq 0 \qquad \forall k \geq k_0$$

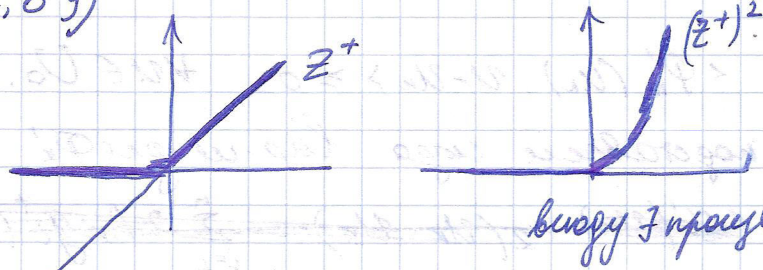
$$\Rightarrow \langle \Phi_k'(u_k), v-u_k \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in U_0 \qquad \Rightarrow (8)$$

Распишем (8):

$$\Phi_k'(u_k) = J'(u_k) + 2(u_k - u_*) + A_k \sum_{i=1}^{m} 2 g_i'(u_k) \cdot g_i^+(u_k) + \sum_{i=m+1}^{s} 2 g_i'(u_k) \cdot g_i(u_k)$$

подставим в (8).

$$(z^+)^2 = (\max\{z, 0\})^2$$



$$((z^+)^2)' = 2\max\{z,0\}$$

$$z = g(u) \Rightarrow (z^+)' = 2 g' g^+$$

подставим в (8) и перейдем к пределу

13.12.2006.

$$\langle \Phi_k'(u_k), u-u_k \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0.$$

подставим сюда выр-ие для Φ_k'

$$\cancel{\langle J'(u_k) + 2(u_k - u_*) + \sum_{i=1}^{n} 2A_k g_i^+(u_k)\, g_i'(u_k) +}$$

1. $$\langle J'(u_k) + 2(u_k - u_*) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{2A_k g_i^+(u_k)}_{=\mu_{ik} \geq 0} g_i'(u_k) + \sum_{i=m+1}^{s} \underbrace{2 g_i(u_k)}_{=\mu_{ik}} g_i'(u_k), u-u_k \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_0$$

Введем вектор $\mu_k = (\mu_{1k}, \dots, \mu_{sk})$

Введем $(1+|\mu_k|^2)^{1/2} \geq 1 > 0$

Все предыдущее нер-во поделим на это число

$$<\underbrace{\frac{1}{(1+|\mu_k|^2)^{1/2}}}_{\lambda_{0k}}\left[J'(u_k)+2(u_k-u_*)+\sum_{i=1}^{s}\underbrace{\frac{\mu_k}{(1+|\mu_k|^2)^{1/2}}}_{\lambda_{ik}}g_i'(u_k),\ u-u_k\right> \geq 0 \quad \forall u\in U_0.$$

Обозн. вектор:

$(\lambda_{0k},\ \ldots,\ \lambda_{sk})=\bar{\lambda}_k$; $|\bar{\lambda}_k|=1$

$\Rightarrow \{\bar{\lambda}_k\}$ — огранич. послед

$\Rightarrow$ {т. Больц. – Вейерштр.} $\exists\ \{\bar{\lambda}_{k_e}\}\to\bar{\lambda}^*$ — одна из предельн. точек

$|\bar{\lambda}_{k_e}|=1 \Rightarrow |\bar{\lambda}^*|=1$

(тут мы пользуемся тем, что задача конечномерн)

$\Rightarrow \bar{\lambda}^*\neq 0$

$\lambda_0^*\geq 0,\ \ldots,\ \lambda_n^*\geq 0$ (т.к. $\lambda_{0k}\geq 0$, $\lambda_{ik}\geq 0$ $\forall i$)

$\Rightarrow$ д-но (3).

Совершаем пред. переход в этом нер-ве

$\{u_k\}\to u_*$ (уже д-но), т.е. сх-ся именно к точке лок. минимума

$\Rightarrow$ $\cancel{\lambda_0^*}$

$$\underbrace{<\lambda_0^* J'(u_*)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^* g_i'(u_*)}_{\frac{\partial\mathcal{L}(u_*,\bar{\lambda}^*)}{\partial u}},\ u-u_*>\geq 0 \quad \forall u\in U_0$$

$\Rightarrow$ д-но (4).

Д-м (5). : 1) Пусть $g_i(u_*)=0$ для какого-то $i=\overline{1,m}$

$\Rightarrow$ (5) очевидно

2). $g_i(u_*) < 0$ $\quad$ (u_* – т. лок. мин задачи $\quad g_i(u_*) \le 0$)

т.к. $u_k \to u_*$ $\Rightarrow$ $g_i(u_k) < 0$ $\forall k \ge k_0$
по св-ву предела

$\Rightarrow \mu_{ik} = 0$ $\quad$ (т.к. μ_{ik} – срезка)

$+ \; g_i(u_k) = 0$

$\Rightarrow \lambda_{ik} = 0 \;\; \forall k \geq k_0 \quad \Rightarrow \lambda_i^* = 0 \quad \Rightarrow \underset{0}{\lambda_i^*} \underset{\neq 0}{g_i(u_*)} = 0$

$\Rightarrow$ пр-ло множ Лагр. для конечномерн. случ.
бесконечномерное $\Rightarrow$ вместо g_i будут операторы
λ_i^* будут из сопряж пр-ва и будет слаб. сх-сть
и $|\lambda_i^*| = 1$ а λ_i м.б. 0

$\Rightarrow$ усл. (3) может не выполн. и от прав. множ. Лагранжа нет никакой пользы.

Пример: $\lambda_0^* \geq 0$. Что будет если $\lambda_0^* = 0$?
функция исчезает, остаются только ограничения (все равно неплохо, остаются g_i – подозрение на min.)
у Лагранжа λ_0 всегда $=1$.

$\exists$ экв. задачи, где $\lambda_0 = 0$

Пр: $J(u) = u \to inf.$; $U = \{u \in E^1, g_i(u) = u^2 \le 0\} =$
$= \{0\}$
- вырожд. случ.

$U_* = \{0\}$ $\qquad 0 = u_*$.

$J_* = 0$

Напишем ф-ю лаг:

$\mathcal{L}(u, \bar\lambda) = \lambda_0 u + \lambda_1 u^2$, $u \in E^1 = U_0$, $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0$

условие (4) вырождается в $\dfrac{\partial \mathcal{L}(u_*, \bar\lambda)}{\partial u} \overset{(4)}{=} 0$

$\quad = \lambda_0 + 2\lambda_1 u \Big|_{u = u_* = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 0}$

$\bar\lambda^* = (0, \lambda)$ $\quad \forall \lambda \ge 0$ $\quad$ получится

Возник. вопрос: когда же $\lambda_0 \ne 0$?

<u>Задача</u> (спросят почти у каждого на экз.)

$J(u) = x^2 + y^2 + z^2 \to inf.$!

$x - y + z \le 1$. $\qquad$ Решить зад. и найти т. min с помощью прав. множ. Лагр.

$U_0 = E^3 \Rightarrow$ (4) превращ. в рав-во нулю градиента

получ. линейн. зад. Останется 1-2 точка, подозрит. на оптимум. Почему т. опт? Это ж необх. усл, не достат!

127

но мы знаем крит. оптим!

$\langle J'(u_*), u-u_*\rangle \geq 0 \;\forall u=(x,y,z): \{x-y+z-1\leq 0\}$ v

u_* знаем, подставляем.

н. б. $x-y+z\geq 1 \Rightarrow g(u)\leq 0$

Теорема Куна–Таккера

Кун-Таккер 50е гг. XX в.

Бывают ли зад., где λ_0 фрактир $=1$ (как это делал Лагранж)?

бывают!

Введем ф-ию Лагранжа, как её ввел Лагр.

$$L(u,\lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i(u)$$ $u\in U_0$, для зад. (1, 2) $\lambda\in\Lambda_0=\{\lambda\in E^s, \lambda_1\geq 0,\dots,\lambda_m\geq 0\}$

– нормальная ф-ия Лагранжа

Опр: т. $(u_*,\lambda^*)\in U_0\times\Lambda_0$ наз. седловой точкой ф-ии Лагранжа, если: выполн.

~~1) $L(u_*,\lambda^*)$~~ двойное нер-во

$$L(u_*,\lambda)\leq L(u_*,\lambda^*)\leq L(u,\lambda^*) \quad \forall u\in U_0 \quad \forall\lambda\in\Lambda_0 \qquad \underline{(2)}$$

Теорема 1: (св-во седловой точки)

Пусть $J(u)$, $g_i(u)$ $i=\overline{1,s}$ определены и конечны на U_0, (u_*,λ^*) – седло в смысле $\underline{(2)}$

$\Rightarrow u_*\in U_*$, $J_* = L(u_*,\lambda^*) = J(u_*)$

{т.е. седло стоит дорогого}

Проанализируем удобное нер-во $L(U_*,\lambda) \le L(U_*,\lambda^*)$

$$\cancel{J(U_*)} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(U_*) \le \cancel{J(U_*)} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(U_*) \quad \forall \lambda \in \Lambda_0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(U_*) \le 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_0 \qquad \underline{(3)}$$

1). рассм $j = \overline{1,m}$. и $\lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \overset{\ge 0}{\lambda_j}, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_s^*) \in \Lambda_0$

подставим в (3).

$$(\lambda_j - \lambda_j^*) g_i(U_*) \le 0 \qquad \forall \lambda_j \ge 0.$$

Пусть $\lambda_j \to +\infty$ (большое число)

$(:\lambda_j)$

$$\left(1 - \underbrace{\frac{\lambda_j^*}{\lambda_j}}_{\to 0}\right) g_i(U_*) \le 0, \; \lambda_j \to +\infty$$

$$g_i(U_*) \le 0$$

2) $j = \overline{m+1, s}$ и $\lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_s^*) \in \Lambda_0$

$$(\lambda_j - \lambda_j^*) g_i(U_*) \le 0 \quad \forall \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ — числ. ось}$$

а). $\lambda_j > 0$ $\xrightarrow[\lambda_j \to +\infty]{—//—}$ $g_i(U_*) \le 0$

б) $\lambda_j < 0$ $\xrightarrow[\lambda_j \to -\infty]{—//—}$ $g_i(U_*) \ge 0$

$\Big\} \Rightarrow g_i(U_*) = 0$

итак, получ., что $\overset{\in U_0}{U_*}$ удовл. всем штрафам

$\Rightarrow \boxed{U_* \in U}$

+ можем д-ть усл-е дополн. нежесткости

$j = \overline{1,m}$ $\quad \lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_s)$

$$(\lambda_j - \lambda_j^*) \underbrace{g_j(u_*)}_{\leq 0} \leq 0$$

уже знаем

Пусть $\lambda_j \to 0+0$

$$\underbrace{\underbrace{-\underbrace{\lambda_j^*}_{\geq 0}}_{\leq 0} \underbrace{g_j(u_*)}_{\leq 0}}_{\geq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow \lambda_j^* g_j(u_*) = 0 \quad \forall j = \overline{1,m}$.

получ. усл. доп. нежесткости.

Рассм. 2ю часть нер-ва для седл. точки:

$$\underline{L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)} \qquad \forall u \in U_0$$

$$J(u_*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(u_*)}_{=0} \leq J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \underbrace{g_i(u)} \qquad \forall u \in U_0 \quad \underline{\underline{(4)}}$$

$\parallel$ $\quad \left(\begin{array}{ll} i = \overline{1,m} & \text{– усл. доп. нежестк.} \\ i = \overline{m+1,s} & g_i(u_*) = 0 \end{array} \right)$

$J(u_*) = L(u_*, \lambda^*)$

т.к. $U_0 \subset U$

$\underset{(4)}{\Rightarrow}$ верно $\forall u \in U$

$$\Rightarrow \underline{J(u_*)} \leq J(u) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i^*}_{\geq 0} \underbrace{g_i(u)}_{\leq 0}}_{\leq 0} \leq \underline{J(u)} \quad \forall u \in U$$

$\Rightarrow u_* \in U_*$ и $L(u_*, \lambda^*) = J_*$.

ч.т.д.

Пример задачи, когда седла нет

$J(u)=u \to \inf$; $U=\{u\in E^1=U_0,\ g(u)=u^2\le 0\}$

$U_*=\{0\}$; $J_*=0$; $U_0=E^1$, $\Lambda_0=\{\lambda\ge 0\}$

$L(u,\lambda)=u+\lambda u^2$, $u\in E^1$, $\lambda\ge 0$

Пусть седло есть $(u_*,\lambda^*)=(0,\lambda^*)$

$L(\underset{0}{u^*},\lambda)=0+\lambda 0=0 \quad \forall\lambda\ge 0$

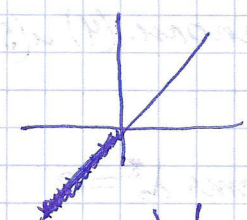
$L(u_*,\lambda^*)\le L(u,\lambda^*)$?

$\boxed{0 \le u+\lambda^* u^2} \quad \forall u\in E^1=U_0$

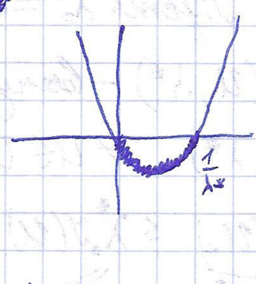
но это неверно!

т.к. это нер-во ни при каких λ^* не вып-ни $\forall u$

1) $\lambda^*=0$



2) $\lambda^*>0$



$\Rightarrow$ седла нет!

Теорема 2 (Куна-Таккера).

Пусть U_0 - вып., замкн. мн-во

рассм $s=m$ (нет огранич. типа рав-в) - ~~так проще~~ (в пред. прим. усл. Сл. не вып)

$\exists \bar{u} \in U$, что $g_i(\bar{u}) < 0 \ \forall i = \overline{1,m}$. (условие Слейтера),

~~Тогда~~ и $J(u)$, $g_i(u)$ - выпукл. ф-ии на U_0, $U_* \neq \emptyset$, $J_* > -\infty$.

Тогда в зад (1) ф-ия Лагранжа имеет седло, т.е. $\exists$ седло (u_*, λ^*).

Д-во (при доп. предполож. $J(u), g_i(u) \in C^1(U_0)$).

Рассм. $\forall$ т. $u_* \in U_*$

и ~~воспольз~~ В силу прав. множ. Лагранжа $\exists \lambda^* \neq 0$:

$\lambda_0^* \geq 0, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$: выполн. (4) и (5)

д-м, что $\lambda_0^* > 0$.

От противного: Пусть $\lambda_0^* = 0$

из условия (4) и $\mathcal{L}(u, \lambda^*)$ - выпукла ($J(u)$ вып, g_i - вып $\Rightarrow$ сумма вып)

$\Rightarrow \mathcal{L}(u_*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(u, \lambda^*) \quad \forall u \in U_0$

$$\underbrace{\lambda_0^*}_{=0} J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i^* g_i(u_*)}_{\substack{=0 \\ \text{в силу усл. доп} \\ \text{нежестк.}}} \leq \underbrace{\lambda_0^*}_{=0} J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u) \quad \forall u \in U_0$$

рассм. $u = \bar{u}$

$$0 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i^*}_{\geq 0} \underbrace{g_i(\bar{u})}_{<0}}_{<0}$$

$\lambda_i^* \geq 0$

$\bar{\lambda} = (0, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) \neq 0$

$\Rightarrow \exists \lambda_j^* \neq 0$, т.е. $\lambda_j^* > 0$

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$, $\boxed{\lambda_0 > 0}$ противореч

$\lambda_0 > 0 \Rightarrow$ проведем нормировку и возьмём $\lambda_0 = 1$.

$\Rightarrow$ получ. $\underline{L(u_*, \lambda^*) \le L(u, \lambda^*)}$

правое нер-во седла.

левое нер-во:

$0 = \lambda_i^* g_i(u_*) \ge \underbrace{\lambda_i g_i(u_*)}_{\substack{\ge 0 \quad \le 0 \\ \le 0}}$ $\quad \forall i = \overline{1,m}$

усл. доп. нежестк.

$\not\Rightarrow J(u_*) + \sum_{i=1}^{m}$

$J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_*) \ge J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u_*) \quad \forall \lambda \ge 0$

$\Rightarrow$ получ. левое нер-во седла. ч.т.д.

<u>в серне</u>

u_* - реш-е нашей зад. (1)

что же такое λ^* ?! Есть зад., где λ^* - реш-е.

λ^* - т. max.

7.02.2007. 8 семестр

Двойственные задачи.

Я ждала и верила
Сердцу вопреки
Мы с тобой 2 берега
У одной реки

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U = \{u \in U_0,\ g_i(u) \le 0,\ i = \overline{1,m};\ g_i(u) = 0,\ i = \overline{m+1,s}\} \quad \underline{(1)}$$

$$\underline{(2)}\quad \mathcal{L}(u,\lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0, \quad \lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in E^s.\ \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0\}$$

$$\underline{(3)}\quad \mathcal{L}(u_*,\lambda) \le \mathcal{L}(u_*,\lambda^*) \le \mathcal{L}(u,\lambda^*)$$

$\in U_0 \times \Lambda_0$ $\quad \forall u \in U_0,\ \forall \lambda \in \Lambda_0$

↑ седловая точка.

u_* - реш-ие задачи (1)

λ^* - реш-ие другой задачи - двойственной.

Введём $\chi(u) = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda_0} \mathcal{L}(u,\lambda) = \begin{cases} J(u), & u \in U \\ +\infty, & u \in U_0 \setminus U \end{cases}$

нов. задача

$\chi(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U_0 \iff (1)$

Введём ф-цию $\psi(\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} \mathcal{L}(u,\lambda)$

$\psi(\lambda) \longrightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda_0 \qquad (1^*)$ — двойственная задача

Решив (1^*), получим некот. данные о зад (1) даже в общем случае.

обозн $\inf\limits_{U_0} \mathcal{X}(u) = \mathcal{X}_* = J_*$.

$U_* = \{ u \in U_0 \, , \, \mathcal{X}(u) = \mathcal{X}_* \}$ - мн-во точек min.

$\sup\limits_{\Lambda_0} \Psi(\lambda) = \Psi^*$

$\Lambda^* = \{ \lambda \in \Lambda_0 \; : \; \Psi(\lambda) = \Psi^* \}$ - мн-во точек max.

$\boxed{\Psi^* \le \mathcal{X}_*}$ (4) - верно всегда.

д-м: рассм. $\forall (u,\lambda) \in U_0 \times \Lambda_0$

$$L(u,\lambda) \le \sup_{\nu \in \Lambda_0} L(u,\nu) = \mathcal{X}(u)$$

$$\inf_{u\in U_0} L(u,\lambda) \le L(u,\lambda), \quad \inf_{u\in U_0} L(u,\lambda) = \Psi(\lambda)$$

(5)

$\Rightarrow \quad \Psi(\lambda) \le \mathcal{X}(u) \qquad \forall u \in U_0 \, , \, \forall \lambda \in \Lambda_0$

$\Psi^* = \sup\limits_{\lambda} \Psi(\lambda) \le \mathcal{X}(u) \quad \forall u \in U_0$

$\Psi^* \le \inf\limits_{U_0} \mathcal{X}(u) = \mathcal{X}_* \qquad \Rightarrow \Psi^* \le \mathcal{X}_*$. ч.т.д.

Когда же $\Psi^* = \mathcal{X}_*$? Это не всегда. см. пример, когда седла нет. - там $<$

Теорема: Для того, чтобы $\Psi^* = \mathcal{X}_*$, $U_* \neq \emptyset$, $\Lambda^* \neq \emptyset$ (6)

необх. и дост., чтобы ф-ия $L(u,\lambda)$ имеет седло

в смысле (3). : $\{$седло$\} = U_* \times \Lambda^*$

мн-во седловых точек

D-во:

$\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ седло:

берем $\forall$ т. $(u_*, \lambda^*) \in U_* \times \Lambda^*$. D-м, что это - седло

в нер-во (5) подставим *:

$$\Psi^* = \Psi(\lambda^*) = \inf_{v} L(v,\lambda^*) \le L(u_*,\lambda^*) \le \sup_{v\in\Lambda_0} L(u_*,v) = \mathcal{X}(u_*) = \mathcal{X}_* \overset{(6)}{=} \Psi^*$$

~~$\Rightarrow L(u_*,\lambda^*) = $~~

$$\Rightarrow \underset{\forall u\in U_0}{L(u,\lambda^*)} \ge \inf_{v\in U_0} L(v,\lambda^*) = L(u_*,\lambda^*) = \sup_{\lambda\in\Lambda_0} L(u_*,\lambda) \ge \underset{\forall \lambda\in\Lambda_0}{L(u_*,\lambda)}$$

$\Rightarrow \forall (u_*, \lambda^*) \in U_* \times \Lambda^* \subseteq \{$седло$\}$

$\Leftarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6). D-м:

$L(u_*,\lambda) \le L(u_*,\lambda^*) \le L(u,\lambda^*) \quad \forall u\in U_0, \forall \lambda\in\Lambda_0$

$$\sup_{\Lambda_0} L(u_*,\lambda) = L(u_*,\lambda^*) = \inf_{U_0} L(u,\lambda^*) = \psi(\lambda^*) \le \psi^*$$

(10)

$= \chi(u_*)$

$\Downarrow$

χ_*

$$\Rightarrow \chi_* \le \psi^* \quad (8)$$

$$\underset{\text{в общ. случ.}}{(4)} + \underset{\text{от седла}}{(8)} \Rightarrow \chi_* = \psi^*$$

$$\Rightarrow \psi(\lambda^*) = \psi^*$$
$$\chi(u_*) = \chi_*.$$

$$\Rightarrow \psi^* = \chi_* = L(u_*,\lambda^*) = \psi(\lambda^*) = \psi^*$$

т.е. если (u_*,λ^*) – седло $\Rightarrow \psi(\lambda^*) = \psi^* \Rightarrow \Lambda^* \ne \emptyset$.

$\Rightarrow \chi(u_*) = \chi_* \Rightarrow u_* \ne \emptyset$.

$\psi^* = \chi_*$ (6).

ч.т.д.

т.е. седл. точка – очень хорошая.

Свойства двойств. задач.

Двойств. зад. (1^*) $\Leftrightarrow$ выпукл. задача, даже если исх. зад. была невыпукла.

$\alpha \in (0,1)$

$$\overbrace{\inf_{u\in U_0} L(u,\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)}^{\psi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)} \overset{\text{линейн. по } \lambda}{=} \underset{\ge 0}{\alpha} L(u,\lambda_1) + \underset{\ge 0}{(1-\alpha)} L(u,\lambda_2) \ge$$

$$\ge \alpha \inf_{U_0} (u,\lambda_1) + (1-\alpha) \inf_{U_0} L(u,\lambda_2) = \alpha\psi(\lambda_1) + (1-\alpha)\psi(\lambda_2).$$

$\forall u \in U_0$

$\Rightarrow \psi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2) \geq \alpha\,\psi(\lambda_1)+(1-\alpha)\,\psi(\lambda_2) \Rightarrow$ вогнутость $\psi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$

Λ_0 - выпукл. мн-во

$\Rightarrow (1^*)$ $\quad (-\psi(\lambda)) \to \inf$, $\lambda \in \Lambda_0$ - выпукл. задача.

(независ. от зад (1)!)

Вернемся к иск. постановке зад. (1^*).

$\psi(\lambda) \to \sup$, $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \Lambda_0 : \psi(\lambda) > -\infty\}$ берем те зн-ия, на кот. нижн. грань $\psi(\lambda)$ - конечна $\{\psi(\lambda) = \inf\limits_{u_0} L(u,\lambda)\}$

Λ_0 - выпукл. по опр.

Λ - выпукл.:

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \overset{\text{д-ть}}{\Rightarrow} \alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2 \in \Lambda \quad \forall \alpha \in [0,1]$

В силу вогнутости ф-ии $\psi(\lambda)$:

$$\psi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2) \geq \underbrace{\alpha}_{\geq 0}\underbrace{\psi(\lambda_1)}_{>-\infty}+\underbrace{(1-\alpha)}_{\geq 0}\underbrace{\psi(\lambda_2)}_{>-\infty} > -\infty$$

$\Rightarrow \alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2 \in \Lambda$.

$\Rightarrow$ двойств. зад. записали в виде (1).

Оказывается, мн-во Λ - не всегда замкнуто!

$\Rightarrow$ теор. Вейерштр. может не сработать, не можем проектировать — полно проблем.

Двойственные задачи в линейном программировании.

зад. лин. прогр. – когда в зад. (1) – <u>всё</u> линейно:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \; u \in U = \{u \in \underset{U_0}{E^n_+} = \{u \in E^n, \; u \geq 0\}$$

все коорд. неотрицат.

$$A_1 u \leq b_1, \; A_2 u = b_2 \}$$

Канонической задача ЛП:

$$\langle c, u \rangle \to \inf, \; u \in U = \{u \geq 0, \; Au = b\}$$

для этой задачи в явн. виде выпишем двойств. задачу

$$L(u, \lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \underbrace{\lambda, Au}{} - b \rangle = \underbrace{\langle c, u \rangle + \langle A^T \lambda, u \rangle}_{\langle c + A^T \lambda, u \rangle} - \langle \lambda, b \rangle$$

$$= \langle c + A^T \lambda, u \rangle - \langle b, \lambda \rangle$$

$$\psi(\lambda) = \inf_{U_0} L(u, \lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda \rangle, & c + A^T \lambda \geq 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$c + A^T \lambda \geq 0 \Rightarrow \langle \underbrace{c + A^T \lambda}_{\geq 0}, \underbrace{u}_{\geq 0} \rangle - \langle b, \lambda \rangle \to \inf = 0 - \langle b, \lambda \rangle.$$

$$u = 0 \Rightarrow \inf.$$

$$(c + A^T \lambda)_{i_0} < 0 \Rightarrow \langle c + A^T \lambda, u \rangle = \underbrace{(\underbrace{c + A^T \lambda}_{<0})_{i_0} \underbrace{u_{i_0}}_{\geq 0}}_{\underset{u_{i_0} \to +\infty}{\downarrow} -\infty} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} (c + A^T \lambda) u_i}_{\text{зафиксир}}$$

$$\Rightarrow \langle c + A^T \lambda, u \rangle \to \psi_*(\lambda) = -\infty$$

двойств. задача

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda\rangle & , c + A^T\lambda \geq 0 \\ -\infty & , \text{иначе} \end{cases} \to \sup_{\lambda \in \Lambda_0}$$

только конечн. зн-ния $\Rightarrow$ только верхн. строчка

$$\Rightarrow -\langle b, \lambda\rangle \to \sup \ , \ \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \Lambda_0, \ c + A^T\lambda \geq 0\}$$

14. 02. 2007.

$J(u) \to \inf$

$F(u) = 0$ – ограничения $\qquad F: X \to Y$

$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \overset{\in \text{сопряж. пр-ву } Y^*}{\lambda} F(u)$.

теперь нет ограничений.

можно на всём пр-ве дифференцировать, брать градиент

Линейное программирование

исх. и двойств. задачи выпис. явно

Тут всё есть, коли нет обмана:
И черти, и любовь, и страсти, и цветы
Грибоедов: „Горе от ума".

Васильев, Иваницкий „Линейное программир"

2003г. „Факториал-пресс".

Общая задача лин. прогр.

$J(u) = \langle c, u\rangle \xrightarrow{мин}$, $u \in U = \{u = (u^1, \dots, u^n) : u^j \geq 0, \ j \in J_0,$

$\underset{m_1\times n}{A_1} \underset{n}{u} \leq \underset{m_1}{b_1}, \ \underset{m_2\times n}{A_2} \underset{n}{u} = \underset{m_2}{b_2}\}$

ограничения типа нер-в и рав-в.

Общ. задача ОЗ

Эти задачи возникают в экономике.
Примеры см. в книжках.

$J(u) = \langle c, u\rangle \to \inf, \ u \in U = \{u \geq 0, \ \overset{m\times n}{A}\overset{n}{u} = \overset{m}{b}\}$ – канонич. задача (1)

из общ. задача канонич. задача вытекает.
∀ общ. зад. может быть запис. в эквив. канонич. форме!

будем расам. не совсем в общ. виде

$J(u) = \langle c, u\rangle \to \inf, \ U = \{u \geq 0, \ A_1 u \leq b_1, \ A_2 u = b_2\}$ (ОЗ$_1$)

$v = b_1 - A_1 u \geq 0 \Rightarrow$ ~~$A_1 v$~~ $A_1 u + v = b_1, \ v \geq 0$

пр-во переменных $z = (u, v)$

$g(z) = \langle c, u\rangle + \langle 0, v\rangle \to \inf, \ z \in Z = \{z = (u, v) \geq 0, \ A_1 u + v = b_1, \ A_2 u + 0\cdot v = b_2\}$

– задача стала канонической (1$_1$)

(ОЗ$_1$) $\Leftrightarrow$ (1$_1$) либо обе зад. не имеют реш-е.
зная реш-е одной зад, легко получ. другое

141

Если z_* - реш. $(1_1) \Rightarrow z_* = (u_*, v_*) \Rightarrow u_*$ - реш-е $(ОЗ_1)$

еще надо с минимумом разобраться, но это легко

u_* - реш-е $(ОЗ_1) \Rightarrow z_* = (u_*, v_* = b_1 - A_1 u_*)$ - реш-е (1_1).

(!) недостаток привед. к канонич. задаче - увеличение размерности задачи!

Если некот. компоненты отриц.:

$\forall$ вещ. число $a = \underbrace{\max\{a, 0\}}_{\geq 0} - \underbrace{\max(-a, 0)}_{\geq 0}$

$$u_i = \underbrace{\max(u_i, 0)}_{w_i \geq 0} - \underbrace{\max(-u_i, 0)}_{\bar{w}_i \geq 0} = w_i - \bar{w}_i$$

$$u = \underset{\geq 0}{w} - \underset{\geq 0}{\bar{w}}$$

Введем $z = (w, \bar{w})$

$\langle c, u \rangle = \langle c, w \rangle - \langle c, \bar{w} \rangle \to \inf$

$$z \in Z = \left\{ (w_1, w_2): \begin{array}{l} A_1 u = A_1 w - A_1 \bar{w} \leq b_1 \\ A_2 u = A_2 w - A_2 \bar{w} = b_2 \end{array} \right\}$$

$(ОЗ_3) \to (1_2)$

$v = b_1 - A_1 w - A_1 \bar{w}$

пр-во перем. увеличивается!

⇒ канонич. задача явл. эталонной в каком-то плане

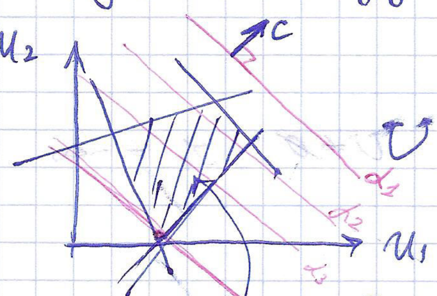
В курсе ЛП изучают как раз канонич. задачу.

Стандартная задача ЛП.

$\langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \{ u \geq 0, Au \leq b \}$ — тоже эталонна в некот. плане

С канонич. удобнее.

Со стандартной ог. удобна геометрич. интерпретация.



рассм. 2мерн. случай

Au, b — две гиперпл-сти (прямые)

общий вид мн-ва $Au \leq b$

(и мн-ва U, соответственно.)

линии уровня.

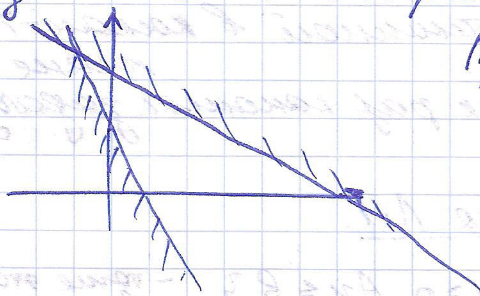
$\langle c, u \rangle = \alpha$ — гиперпл-сть, 1-ная векторус

$\langle c, u - u_0 \rangle$

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Мы минимизируем

посл. касание — и есть наша минимизация.

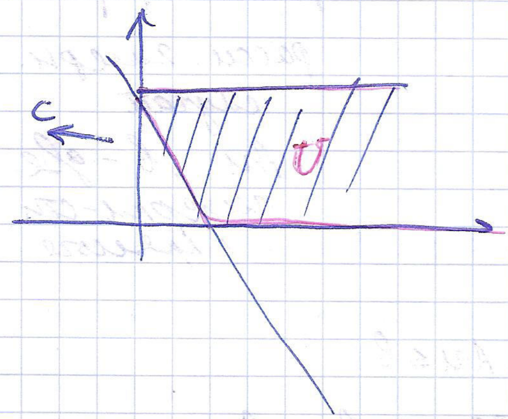
когда мн-во V - неогранич., все завис. от $\bar{c}$



Пример: мн-во V пустое

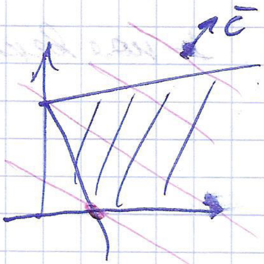
Общая часть есть, но вне нашего квадранта.

$\exists$ случаи: $\inf = -\infty$

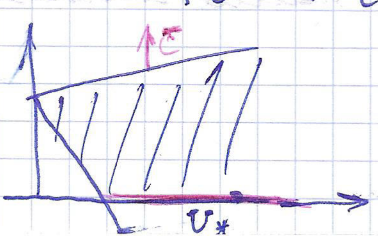


$V \neq \varnothing$, $J_* = -\infty$

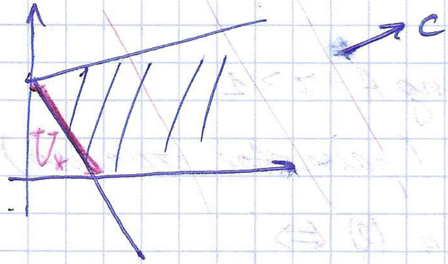
то же мн-во, но $\nearrow \bar{c}$ $\Rightarrow$ все ок.



$\uparrow \bar{c}$: $\bar{c} \perp Ox$



много решений.



U_* – огранич. мн-во / отрезок.

Во всех случаях, когда зад. имеет реш-е, всегда имеет угловые точки.

Угловые точки.

точка $u \in U$ наз. угловой точкой мн-ва U, если u не является внутренней точкой никакого отрезка $[v_1, v_2]$, лежащего в U.

$= \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2, \quad 0 \le \alpha \le 1.$

$\forall$ точка пов-сти шара – угловая

у двугр. угла, цилиндра – ни одной угл. точки

Алгебраическая характеристика угловой точки для мн-ва $U = \{u \ge 0, Au = b\}$ (2)

$A = (A_1, \dots, A_n)$

$Au = b \Rightarrow A_1 u^1 + A_2 u^2 + \dots + A_n u^n = b.$

$\langle a_i, u \rangle = b^i$

Теорема: Пусть $A^{m\times n} \neq \emptyset$, $\operatorname{rang} A = r \geq 1$

$A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ — лин/независ (ранговые столбцы).

т. $v = (\underbrace{v^1, \dots, v^n}_{\in V})$ — угловая точка (2) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_{j_1} \underbrace{v^{j_1}}_{\geq 0} + A_{j_2} \underbrace{v^{j_2}}_{\geq 0} + \dots + A_{j_r} \underbrace{v^{j_r}}_{\geq 0} = b$, $v^j = 0$ $\forall j \neq j_1, \dots, j_r$

(3)

$v^{j_1}, \dots, v^{j_r}$ — базисные координаты

(небазисн. обяз. 0)

Д-во:

$\Rightarrow$ 1) $v = 0 \Rightarrow A \cdot 0 = b \Rightarrow b = 0$

Берем $\forall A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ — ранговые столбцы

$A_{j_1} \cdot 0 + \dots + A_{j_r} \cdot 0 = 0 = b$.

2) $v \neq 0$.

$v^{j_1}_{\geq 0}, \dots, v^{j_k}_{> 0}$, остальные $= 0$.

д-м, что $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ — лин/независ.

Пусть $\exists (\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_k}) = \gamma$: $A_{j_1}\gamma_{j_1} + \dots + A_{j_k}\gamma_{j_k} = 0 \to \tilde{A}\gamma = 0$

$\tilde{A} = (A_{j_1}, \dots, A_{j_k})$.

т.е. γ — реш-е ур-я $\tilde{A}\gamma = 0$

$v_{\pm} = v \pm \varepsilon\gamma$

$Av_{+} = Av + \varepsilon \underbrace{A\gamma}_{=0} = Av = b$

$v_{\pm} = v \pm \varepsilon\gamma > 0$ (есть в v запас неотрицательности).

$v_{\pm} \in V$

$v = \frac{1}{2}(v_+ + v_-) \Rightarrow v$ - внутр. точка (середина) отрезка $[v_+, v_-]$

$\Rightarrow v$ - не угловая.

противоречие. (получ, что $\exists\, \gamma \neq 0$) $\Rightarrow \gamma = 0. \Rightarrow A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ - лин. незав.

$\Rightarrow k \le r$.

1) $k = r \Rightarrow A_{j_1}, \dots, A_{j_k} = A_{j_r}$. Получили ранговую сист. столбцов

$A_{j_1} v^{j_1} + \dots + A_{j_r} v^{j_r} = b$. , ост. $v_j = 0$ ч.т.д.

2). $k < r$. , $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}, \underbrace{A_{j_{k+1}}, \dots, A_{j_r}}_{\text{добираем до ранга}} \Rightarrow$ тоже получим (3).

$\underset{v_{j_{k+1}}}{\overset{0}{\shortparallel}} \qquad \underset{v^{j_r}}{\overset{0}{\shortparallel}}$

$\Leftarrow$ Пусть $v \in V$ и вып. (3). Покажем, что v-угл. точка.

от противного:

$\exists\, v_1, v_2 \in V : v = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2, \quad 0 \overset{\exists}{<} \alpha < 1$

из (3): $v^j = 0$, $j \neq j_1, \dots, j_r$.

~~$0 = \alpha v^{j_r}$~~ $\quad v^j = 0 = \underset{>0}{\alpha} \underset{\geq 0}{v_1^j} + \underset{>0}{(1-\alpha)} \underset{\geq 0}{v_2^j} \geq 0 \Rightarrow v_1^j = 0$, $v_2^j = 0$ $j \neq j_1, \dots, j_r$

$\Rightarrow A_{j1} v_1^{j1} + \dots + A_{j2} v_1^{j2} = b$, т.к. $A v_1 = b$.

$A v_2 = b \Rightarrow A_{j1} v_2^{j1} + \dots + A_{j2} v_2^{j2} = b$

$\Big\} \Rightarrow$ вектор b един спос. через ранг. столбцов.

$v_1^{j1} = v_2^{j1}, \dots, v_1^{j2} = v_2^{j2}$

$\Rightarrow v_1 = v_2$. (концы отрезка слились)

$\Rightarrow v$ не явл. внутр. точкой никакого отрезка

$\Rightarrow v$ — угловая точка

<u>Опр</u>: Угл. точка наз. <u>вырожденной</u>, если среди базисных координат есть нули и наз <u>невырожденной</u>, если все они > 0.

<u>Пример</u>: $U = \{ u = (u^1, u^2, u^3, u^4) \geq 0,$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} u^4 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $r = 2$

$u_1 = (2, 1, 0, 0)$ — угл. точка, невырожд.

базис $B(u_1) = (A_1, A_2)$

$u_2 = (0, 0, 1, 0)$ — вырожд. угл. точка. $B(u_2) = (A_1, A_3)$ или (A_2, A_3) или (A_4, A_3).

$u_3 = (0, \frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$ (A_2, A_4)

невырожд. угл. точке — 1 базис
вырожд. — м.б. несколько

21.02.2006
лекция №3

Симплекс-метод

$\underset{\geq 0}{v}$: $A_{j1} v^{j1} + \dots + A_{jr} v^{jr} = b$, $v^j = 0$, $j \neq j1, \dots, jr$.

$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf.$ $u \in U = \{u \geq 0, \overset{m \times n}{A} u = b\}$ (1)

Идея: надо перебрать все угл. точки

их конечн. число:

ранг. наборов столбцов - конечн. число.

$\Rightarrow$ алгоритм. способом можно перебрать все угл. точки — но их очень много!
Их число м.б. близко к C_n^r

Симплекс-метод перебирает угл. точки не бездумно, а целенаправленно (по мере убывания зн-ия ф-ии.)

Рассм. простейший вариант симплекс-метода.

Пусть есть откуда-то угл. точка v (мы пока не знаем точно, есть ли в мн-ве U угл. точка)

К ней есть базис $B(v) = \{A_{j1}, \dots, A_{jr}\}$

(а у нашей зад. можно перейти к вспомогат., там ее симплекс-метод решает и находит угл. точку в нашей зад.)

$(v, B(v)) \to (w, B(w))$:

новая угл. точка

1) $\boxed{J(w) \leq J(v)}$

это наша цель.

Не огранич. общн. (перенумеруем переменные $j1 \to 1, \dots, jr \to r$) считаем, что у т. v базис $A_1, \dots, A_r$

$B(v) = \{A_1, \dots, A_r\} = B$.

~~[illegible]~~ $v = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}$ ← базисн. координаты ← первые r шт.

$$c = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Канонич зад. (1) будем рассм. при предположении, что 1) $r = \text{rang}\, A = m$ (выбросим лин (завис. строки)

2) $m < n$ $\qquad r = m \le n$ - в ∀ матрице исключаем случай $m = n$, т.к. это несодержательный случай $A^{n \times n} u = b \quad \det A \ne 0$ (rang = n) $\Rightarrow$ решаем $u = A^{-1} b \geq 0$

$u = A^{-1} b \geq 0 \Rightarrow U = \{u \geq 0\}$ ~~[illegible]~~

или $U = \varnothing$ (если $\exists\, u^i < 0$)

Приведённая форма задачи (1)

(приведём зад. (1) к угловой точке)

$$Au = b \Rightarrow \underbrace{A_1 u^1 + \dots + A_r u^r}_{B\bar{u}} + A_{r+1} u^{r+1} + \dots + A_n u^n = b$$

$$B\bar{u} + \sum_{i=r+1}^{n} A_i u^i = b$$

$$\Rightarrow \bar{u} + \sum_{i=r+1}^{n} (B^{-1} A_i) u^i = B^{-1} b = \bar{v}$$

$\left(Av = B\bar{v} + 0 = b \Rightarrow B\bar{v} = b \Rightarrow \bar{v} = B^{-1} b. \right)$

получ. переход к новой сист. Эта сист. наз приведённой.

$\bar{u} = \bar{v} - \sum\limits_{i=r+1}^{n} (B^{-1}A_i)\, u^i$

$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum\limits_{i=r+1}^{n} c_i u^i = \langle \bar{c}, \bar{v} - \sum\limits_{i=r+1}^{n} (B^{-1}A_i)\, u^i \rangle + \sum\limits_{i=r+1}^{n} c_i u^i =$

$= \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum\limits_{i=r+1}^{n} \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle u^i + \sum\limits_{i=r+1}^{n} c_i u^i =$

$= \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum\limits_{i=r+1}^{n} \Big(\underbrace{\langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle - c_i}_{\Delta_i} \Big) u^i$

$\Rightarrow J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum\limits_{i=r+1}^{n} \Delta_i u^i$, $\quad \Delta_i = \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle - c_i$, $i = \overline{r+1, n}$

Рассм. задачу: (та же самая, но выделены базисн. и небазисн. комп.)

$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \sum\limits_{i=r+1}^{n} \Delta_i u^i \to \inf$, $u \in U = \{u \geq 0,\ \bar{u} + \sum\limits_{i=r+1}^{n} (B^{-1}A_i) u^i = \bar{v}\}$

— приведённая форма зад. (1) (эквивал. исх. задаче)

играем только u^i, $i = \overline{r+1, n}$, чтобы добиться минимизации

выделим у "хвоста" u^k; положим $u^{r+1} = 0, \dots, u^{k-1} = 0$,
$u^{k+1} = 0, \dots, u^n = 0$

$\Rightarrow J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \Delta_k u^k$, $u \in U = \{u \geq 0,\ \bar{u} + (B^{-1}A_k) u^k = \bar{v}\}$

$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \Delta_k u^k \to \inf$, $\bar{u} = \bar{v} - (B^{-1}A_k) u^k$

эта зад. не эквив. зад. (1) (у хвоста оставили только 1 компоненту),

но она явл. решающей.

надо найти реш-е этой легкой задачи:

$J(w) \leq J(v)$, $w \in U$: $w \geq 0$, $Aw = b$

$J(u) = \underset{\text{фикс}}{\langle \bar{c}, \bar{v} \rangle} - \Delta_k \underset{\geq 0}{u^k}$

убывание: $u^k > 0$ и $\Delta_k > 0$ – таким образом выбираем №k

$\bar{u} = \bar{v} - (B^{-1}A_k) u_k$

компонента $B^{-1}A_k > 0$ => опасные компоненты

в завис. от знаков $B^{-1}A_k$ и u_k 3 случая.

1) $\underset{i=r+1,n}{\Delta_i \leq 0}$ – безнадёжный случай

может быть только увеличение

=> $\bar{v}$ – оптимальная точка (т. min)

т.е. $\bar{v}$ – решение зад. (1)

$\Delta_i \leq 0$
$\Leftrightarrow$
$c_i \geq \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle$

д-во: берём $\forall u \in U$

$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum\limits_{i=r+1}^{n} c_i u^i \geq$

$c_i \geq \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle$

$\geq \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum\limits_{i=r+1}^{n} \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle u^i = \langle \bar{c}, \underbrace{\bar{u} + \sum\limits_{i=r+1}^{n} B^{-1}A_i u^i}_{\bar{v}} \rangle =$

"хвост" $v = 0$

$= \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle = \langle c, v \rangle = J(v)$

$\Rightarrow J(u) \geq J(v) \quad \forall u \in U$ чтд

2) $\exists \Delta_k > 0$, но $(B^{-1}A_k) \leq 0$

$$\bar{u} = \underbrace{\bar{v}}_{\geq 0} - \underbrace{\underbrace{B^{-1}A_k}_{\leq 0} \underbrace{u^k}_{\geq 0}}_{\leq 0} \geq \bar{v} \geq 0$$

$\Rightarrow \bar{u} > 0 \Rightarrow$ это допустимая точка.

$u_k \to +\infty \Rightarrow \bar{u} \to +\infty$ остаём в пределах нашего мн-ва U

$$J(u) = J(v) - \underbrace{\Delta_k}_{\geq 0} \underbrace{u^k}_{\substack{\geq 0 \\ \to +\infty}} \longrightarrow -\infty$$

Нашли направление: двигаемся по лучу $k+\infty$, $J(u) \to -\infty \Rightarrow \inf = J_* = -\infty \Rightarrow$ задача не имеет решение.

3) $\exists \Delta_k > 0$ и $\forall k$, для которых $\Delta_k > 0$ $\exists i : \underbrace{(B^{-1}A_k)^i}_{\geq 0} > 0$

$I_k(v) = \{i : (B^{-1}A_k)^i > 0\}$

$\Rightarrow$ реализовали желание:

$(B^{-1}A_k)^i > 0 \Leftrightarrow I_k(v) = \{i : (B^{-1}A_k)^i > 0\} \neq \varnothing$

a) $i \notin I_k(v)$

$u^i = v^i - \underbrace{(B^{-1}A_k)^i}_{\leq 0} \underbrace{u_k^k}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall u^k \geq 0$ сводится к случ. 2).

2) $i \in I_k(v) \Rightarrow u^i = v^i - \underbrace{(B^{-1}A_k)^i}_{> 0} \underbrace{u^k}_{\geq 0} \geq 0$ должно выполн

153 $\Rightarrow \boxed{v^i \geq (B^{-1}A_k)^i u_k}$ — ограничение на u_k.

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{v^i}{(B^{-1}A_k)^i} \geq u_k \geq 0}$ ограничение на u^k.

$\forall i \in I_k(v)$

$\Rightarrow \bar{u} \geq 0$

$J(u) = J(v) - \underbrace{\Delta_k}_{>0} u^k$ хотим сильнее уменьш.

$\Rightarrow u_k = \min\limits_{i \in I_k(v)} \dfrac{v^i}{(B^{-1}A_k)^i}$ – правило выбора u_k.

Описали 1 шаг. Но тут нас будут подвирать неприятности.

28.02.2007. Лекция №4.

Продолжение док-ва:

$$\min_{i \in I_k(v)} \frac{v^i}{\gamma_{ik} > 0} = \frac{v^s}{\gamma_{sk}} = u^k$$

$$\gamma_{ik} = (B^{-1}A_k)^i$$

$$\bar{v} - B^{-1}A_k u_k = \bar{u} \qquad Au = B$$

Пришли к новой точке

$$w = (\bar{u} = \bar{v} - (B^{-1}A_k)u_k, \overbrace{0, 0, u^k = \frac{v^s}{\gamma_{sk}}, 0, \ldots, 0}^{n-r}) \in U$$

т. е. $(v, B(v)) \xrightarrow{\text{III}} (w, B(w))$ – покажем, что это угл. точка

с $B(w) = (A_1, \ldots, A_{s-1}, A_k, A_{s+1}, \ldots, A_r)$

раньше на s-м месте стоял A_s и это был базис.

у угл-точки $(n-r)$ базисных нулей.

у v посчит. s-ю коорд.

$$u^s = v^s - (\underbrace{B^{-1}A_k}_{B_k})^s \underset{\frac{\gamma_{sk}}{B_k}}{\underset{\shortparallel}{u_k}} = v^s - \gamma_{sk}\frac{v^s}{\gamma_{sk}} = v^s - v^s = 0.$$

$\Rightarrow$ $n-r$ нулей есть точно $\left(\begin{matrix} n-r+1 \\ \text{и } 1\end{matrix}\right)$

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{s-1} A_{s-1} + \alpha_k A_k + \alpha_{s+1} A_{s+1} + \dots + \alpha_r A_r = 0.$$

д-м, что все $\alpha_i = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{r} \alpha_i A_i + \alpha_k A_k = 0.$$

$$A_k = \underbrace{B\cdot B^{-1}A_k}_{B\cdot\begin{pmatrix}\gamma_{1k}\\ \vdots \\ \gamma_{rk}\end{pmatrix}} = A_1\gamma_{1k} + \dots + A_r\gamma_{rk} = \sum_{i=1}^{r} A_i\gamma_{ik}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{r} \alpha_i A_i + \alpha_k \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ik} A_i = 0$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{r} (\alpha_i + \alpha_k\gamma_{ik}) A_i + \alpha_k \gamma_{sk} A_s = 0$$

л/комб. базисн. столбцов угловой точки.

эта сист л/нез (базис угл. точки v)

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_i + \alpha_k\gamma_{ik} = 0 \\ \alpha_k \underbrace{\gamma_{sk}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0\end{cases} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \Rightarrow A_1, \dots, A_{s-1}, A_k, A_{s+1}, \dots, A_r$$

— л/нез. система

$$A_1 w_1 + \dots + A_{s-1} w_{s-1} + A_k v_k + A_{s+1} w_{s+1} + \dots + A_r w_r = b.$$

Симплекс-таблица.

аналог. матрицы. Запишем для т. v и соотв. базиса $(v, B(v))$

базисн. координаты

строки	базисные № угл. точки v $Б(v)$	угл. точка Y	u^1	...	u^i	...	u^s	...	u^r	u^{r+1}	...	u^n
Γ_1	1	v^1	1	0	0	...	0		0	$\gamma_{1,r+1}$		γ_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$										
Γ_s	s	v^s	0	...	0		$\gamma_{ss}=1$		0	$\gamma_{s,r+1}$	...	γ_{sn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$										
Γ_r	r	v^r							1	$\gamma_{r,r+1}$		γ_{rn}
Δ		$J(v)$	0	...	0		0		0	Δ_{r+1}	...	Δ_n

$Au = b \qquad \cdot B^{-1}$

$\Updownarrow\ \bar{u} + \sum\limits_{k=r+1}^{n} (B^{-1}A_i) u^i = \bar{v} = B^{-1} b$ приведенная система

выделим s-ое ур-ие. (s-ая строчка).

$$u^s + \sum_{i=r+1}^{n} (B^{-1}A_i)^s u^i = v^s$$

Впишем это ур-ие в таблицу

$J(v) = J(u) + \sum\limits_{i=r+1}^{n} \Delta_i u^i$, $\Delta_i = \langle B^{-1} A_i \rangle - c_i$, $i=\overline{r+1,n}$

первые r - нули: $i=\overline{1,r}$: $\Delta_i = \langle \bar{c}, \underbrace{B^{-1}A_i}_{e_i} \rangle - c_i =$

т.к. A_i - столбец матр. B.

$= \langle \underbrace{\bar{c}, \bar{e}_i}_{c_i} \rangle - c_i = 0.$

$J(u)$ писать не принято в мнемонич. правило, т.к. этот столбец вида $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Рассм. симпл.-метод I, II, III. с использ. симплекс-табл.

(I) среди $u^{r+1}, \dots, u^n$ $\exists\, u^k$, $k=\overline{r+1,n}$:

$$\begin{array}{|c|}
u_{1k} \\
u_{sk} \\
\vdots \\
u_{rk} \\
\hline
\Delta_k
\end{array}$$

$J(u) = J(v) - \Delta_k u^k$.

все $\Delta_k < 0$ $\quad k=\overline{r+1,n}$ $\Rightarrow$ v-оптим. точка

(II) $\exists \Delta_k > 0$, $B^{-1}A_k \le 0$. (весь столбец u_k оказ. отрицательн.) (1)

$\Rightarrow J_* = -\infty$. Зад. не имеет решения.

(III) $\exists \Delta_k > 0$ и во всех этих столбцах $\exists$ положит. коорд.

$$(B^{-1}A_k)^i = \gamma_{ik} > 0.$$

$\gamma_{sk} > 0 \Rightarrow I_k(v) \neq \emptyset$

все те номера, в ~~кот.~~ столбц. есть положит. коорд

$$u^k = \min_{i \in I_k(v)\,:\, \gamma_{ik} > 0} \frac{v_i}{\gamma_{sk}}$$

всё s-е ур-ие (s-я строчка) делится на γ_{sk}

в v № s

достиг. min $\Rightarrow$ переход к след. угл. точке v.

A_s выбрас. из базиса, A_k входит в базис.

s	u^k	...

вместо v^s

159 Вот и весь симплекс-метод: перех. от одной угл. точке к другой.

Как напис. симплекс-табл. для новой угл. точки?

$$B^{-1}(v) \mid A_1 u^1 + \dots + A_n u^n = b$$

в новой табл. в столбце u_k должно стоять:

$$\begin{array}{c|c|}
 & u_k \\
\hline
 & \gamma_{1k} \\
 & \vdots \\
\hline
s & 1 \\
\hline
 & \vdots \\
 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

мет. Гаусса-Жордана: матр → $\boxed{\diagdown}$

матрицы эквивалентны после преобр-ия

~~Надо преобразовать систем~~

Переход в симпл-табл. к новой угл точки происх. путем исключения Гаусса-Жордана: столб →

$$\begin{array}{c|c|}
 & 0 \\
 & \vdots \\
\hline
s & 1 \\
\hline
 & \vdots \\
 & 0 \\
\hline
 & 0 \\
\end{array}$$

Комм. $r_s(w) = \dfrac{r_s(v)}{\gamma_{sk}}$ (поделим всю s-ю строку на γ_{sk} ⇒ образ. 1). (с помощью 1 делаем 0 с пом. Г-Ж.

②

$$r_i(w) = r_i(v) - \gamma_{ik} \frac{r_s(v)}{\gamma_{sk}}$$

$r_s(w)$

$$\Delta(w) = \Delta(v) - \Delta_k \cdot \frac{r_s(v)}{\gamma_{sk}}$$

s-ый столб. ~~[illegible]~~ испортится

(на позиции (s,s) была 1)

остальн. столбцы не изменятся

(на позиции $(s, i)_{i \neq s}$ стояли 0,

они не изменятся.).

Шуму много, шерсти мало, —

Сказал чёрт, подстригая кошку.

Финская пар. присловье.

„Пошёл по шерсть, вернулся стриженным“ — русск. ?

$$J(w) = J(v) - \Delta_k u^k = J(v) - \Delta_k \frac{v^s}{\gamma_{sk} > 0}$$

"u^k".

А вдруг $v^s = 0$?! Хоть и базисн. коорд., но м.б. вырожд. угл. точка.

у вырожд. угл. точки $0 \leq u^k = \min\limits_{i \in I_k(v)} \frac{v_i}{\gamma_{ik}} = \frac{\overset{\geq 0}{v^s}}{\underset{> 0}{\gamma_{sk}}} = 0$ у вырожд. угл. точки

161

$\Rightarrow J(w) = J(v)$ м.б. (не всегда, а когда $v^s = 0$, $\gamma_{sk} > 0$.)

1) $J(w) \leq J(v)$

2) w - угл. точка $\Rightarrow w = v$. (см. вид w)

Изменился базис! $B(v) \to B(w)$
угл. точка не изменился.

Может случиться, что будем крутиться по базисам угл. точки. Зацикливание
(можем наход. далеко от т. min.)

Невырождённая задача

У всех угл. точек $v^s > 0$ $s = \overline{1, r}$.

$\frac{v^s}{\gamma_{sk}} > 0 \Rightarrow$ строгий перех. к новой угл. точке.

$\Rightarrow$ кажд. раз переход.

$(v_0, B(v_0)), (v_1, B(v_1)), \ldots (v_p, B(v_p))$

$J(v_0) > J(v_1) > \ldots > J(v_p)$

убыв. $\Rightarrow$ никогда не вернёмся в точку, в кот. уже был $\Rightarrow$ ч угл. точек конечн. число, базисов - конечн. число ч

$\Rightarrow$ придём к min

(3)

Антициклин. бывает, когда $n > 6$
(могут быть циклы).

Зацикливание — довольно редк. вещь
(но бывает)

„антициклин — "противоядие" от зацикливания
(проф. Васильев!).

антициклин — когда можно разумн. способом проверять на зацикл.

к правилу $0 \le u^k = \frac{v^s}{\gamma_{sk>0}}$

добавить дополнение:

если на нескольких точках, то надо разумно выбрать N^0, чтобы не было зацикливания

$\exists$ несколько примеров антициклинов
(принципиально разные)

Пр: Лексико-графич. правило

Можно упорядочить вектора.

Опр: Говорят, что вектор $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ лексикографически положителен и обозначают $x \succ 0$, если $x \neq 0$ первая ненулевая координата положительна.

$(-1, 0, 2, \dots) \not> 0$

$(0, 0, \dots, 0, 1, 2, \dots) > 0$

$x > y$, если $x - y > 0$

$$\begin{array}{l} x = (1, 1, \dots, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \dots) \\ y = (1, 1, \dots, 1, 1, \dots) \end{array} \quad y > x$$

$\forall x, y$: 1) $x > y$ или 2) $x < y$ или 3) $x = y$

Частичн. упорядоченность.

Его хватает, чтобы сделать антициклин.